مشتق از مرتبه بالاتر

همانند تابع $y=f(x)$، می توان برای تابع $Z=f(x,y)$ را مشتق از مرتبه بالاتر را درصورت وجود، بدست آورد

$$Z=f(x,y)\begin{cases} Z_{xx}=Z_{x^2}=\dfrac{\partial\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\\[2ex] Z_{yy}=Z_{y^2}=\dfrac{\partial\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\end{cases}$$

مثال ۱: برای تابع $Z=\ln(2x^2-y^3)$، مطلوبست Z_{xx} و Z_{yy}.

حل:

$$Z_x=\frac{4x}{2x^2-y^3}\longrightarrow Z_{xx}=\frac{4(2x^2-y^3)-(4x)(4x)}{(2x^2-y^3)^2}=\frac{-8x^2-4y^3}{(2x^2-y^3)^2}$$

$$Z_y=\frac{-3y^2}{2x^2-y^3}\longrightarrow Z_{yy}=\frac{-6y(2x^2-y^3)-(-3y^2)^2}{(2x^2-y^3)^2}$$

$$=\frac{-12x^2y-3y^4}{(2x^2-y^3)^2}$$

از توابع Z_x و Z_y نیز می توان به ترتیب نسبت y و x مشتق را بدست آورد

$$Z_{yx}=\frac{\partial\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)}{\partial x}=\frac{\partial^2 Z}{\partial y\partial x}\quad,\quad Z_{xy}=\frac{\partial\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)}{\partial y}=\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}$$

مثال ۲ اگر $Z=e^{x^2-xy}$، مطلوبست $\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}$ و $\dfrac{\partial^2 Z}{\partial y\partial x}$.

حل:

$$Z_x=(2x-y)e^{x^2-xy}$$

$$Z_{xy} = (-1)e^{x^2-xy} + (2x-y)\left[(-x)e^{x^2-xy}\right]$$

$$\longrightarrow \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = (-1-2x^2+xy)\,e^{x^2-xy}$$

$$Z_y = (-x)e^{x^2-xy} \longrightarrow Z_{yx} = -e^{x^2-xy} + (-x)\left[(2x-y)e^{x^2-xy}\right]$$

$$\longrightarrow \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} = (-1-2x^2+xy)\,e^{x^2-xy}$$

مشاهده میگردد $Z_{xy} = Z_{yx}$.

* قضیه * اگر تابع $Z = f(x,y)$ در نقطه (α, β) پیوسته باشد، آنگاه مشتقات جزئی Z_{yx} و Z_{xy} در این نقطه برابر هستند.

مثال ۳- اگر $Z = e^x(\cos y + x\sin y)$، نشان دهید $Z_{xy} = Z_{yx}$

حل:

$$Z_x = e^x(\cos y + x\sin y) + e^x(\sin y)$$

$$Z_x = (\cos y + \sin y + x\sin y)\,e^x$$

$$Z_{xy} = (-\sin y + \cos y + x\cos y)\,e^x$$

$$Z_y = (-\sin y + x\cos y)\,e^x$$

$$Z_{yx} = (\cos y)e^x + (-\sin y + x\cos y)\,e^x$$

$$Z_{yx} = (\cos y - \sin y + x\cos y)\,e^x$$

مشاهده می‌گردد $Z_{xy} = Z_{yx}$.

به طریق مشابه می‌توان مشتق مرتبه سوم، چهارم و بالاتر را نیز محاسبه نمود:

$$\frac{\partial^{m+n} Z}{\partial x^m \partial y^n} = Z_{x^m y^n} = Z_{\underbrace{xx\cdots x}_{m\text{ بار}}\underbrace{yy\cdots y}_{n\text{ بار}}}$$

مثال ۴: اگر $Z = \sin^2(y^2+xy)$، مطلوبست Z_{x^2y} و Z_{yxy}.

حل:

$$Z_x = 2(y)\cos(y^2+xy)\sin(y^2+xy)$$

$$Z_{xx} = 2y\Big[\big(-y\sin(y^2+xy)\big)\sin(y^2+xy) + \big(\cos(y^2+xy)\big)(y)\cos(y^2+xy)\Big]$$

$$Z_{x^2} = 2y^2\left[-\sin^2(y^2+xy) + \cos^2(y^2+xy)\right]$$

$$Z_{xxy} = 4y\left[-\sin^2(y^2+xy)+\cos^2(y^2+xy)\right] + 2y^2\Big[-2(2y+x)\cos(y^2+xy)\sin(y^2+xy) - 2(2y+x)\sin(y^2+xy)\cos(y^2+xy)\Big]$$

$$Z_{xxy} = -4y^2(2y+x)\left[\left[\cos(y^2+xy)\sin(y^2+xy)\right]\right]$$

$$\boxed{Z_{x^2y} = -4y^2(2y+x)\sin 2(y^2+xy)}$$

(۱۷)

$$Z_y = 2(2y+x)\cos(y^2+xy)\sin(y^2+xy)$$

$$Z_{yx} = 2\cos(y^2+xy)\sin(y^2+xy) + 2(2y+x)\left[-(y)\sin(y^2+xy)\right]\cdot$$
$$\sin(y^2+xy) + 2(2y+x)\cos(y^2+xy)\left[y\cos(y^2+xy)\right]$$
$$= \sin 2(y^2+xy) + 2\underbrace{y(2y+x)}_{2(2y^2+xy)}\left[-\sin^2(y^2+xy)+\cos^2(y^2+xy)\right]$$

$$Z_{yxy} = 2(2y+x)\cos 2(y^2+xy) + 2(4y+x)\left[\qquad\qquad\right]$$
$$+ 2(2y^2+xy)\left[-2(2y+x)\cos(y^2+xy)\sin(y^2+xy) - 2(2y+x)\sin(y^2+xy)\cos(y^2+xy)\right]$$
$$-(2y+x)\sin 2(y^2+xy)$$

$$Z_{yxy} = 2(2y+x)\cos 2(y^2+xy) + 2(4y+x)\left[\cos^2(y^2+xy)-\sin^2(y^2+xy)\right]$$
$$+ (-2)(2y+x)\sin 2(y^2+xy)$$

مثال ۵. اگر $u = xe^y + ye^x$ ، نشان دهید

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = x\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2} + y\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}$$

حل :

$$U_x = e^y + ye^x, \quad U_{xx} = ye^x, \quad U_{xxx} = ye^x$$
$$U_y = xe^y + e^x, \quad U_{yy} = xe^y, \quad U_{yyy} = xe^y$$
$$U_{x^3} + U_{y^3} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = ye^x + xe^y$$
$$U_{xy} = e^y + e^x, \quad U_{x^2y} = e^x$$
$$U_{xyy} = e^y \quad \rightarrow x\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2} + y\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y} = xe^y + ye^x$$

۱۸

محاسبه مشتقات جزئی برای تابع $F(x,y,Z)=0$ در اینجا Z تابعی از x و y است.

بطور کلی اگر هر تابع به شکل $F(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, Z)=0$ داشته باشیم بطوریکه

$$u_1 = u_1(x,y)$$
$$u_2 = u_2(x,y)$$
$$\vdots$$
$$u_n = u_n(x,$$

$$\rightarrow F_{u_1}\cdot(u_1)_x + F_{u_2}\cdot(u_2)_x + \dots + F_{u_n}\cdot(u_n)_x + F_z \cdot Z_x = 0$$

در نتیجه

$$Z_x = -\frac{F_{u_1} u_{1x} + \dots + F_{u_n} u_{nx}}{F_z}$$

اکنون برای حالت خاص $F(x,y,Z)=0$ می‌توان نوشت

$$F_x\cdot(x)_x + F_y\cdot\underset{0}{(y)_x} + F_z\cdot Z_x = 0$$

$$Z_x = -\frac{F_x}{F_z} \quad , \quad Z_y = -\frac{F_y}{F_z}$$

مثال ۷ اگر $e^z - xyz = 0$، مطلوبست Z_x و Z_y.

حل: در این مساله $F = e^z - xyz = 0$، با توجه به فرمول‌های فوق می‌توان نوشت:

$$Z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{0 - yz}{e^z - xy} = \frac{yz}{e^z - xy}$$

$$Z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{0 - xz}{e^z - xy} = -\frac{xz}{e^z - xy}$$

دیفرانسیل کامل

در تابع $y=f(x)$ ، دیفرانسیل تابع ، dy ، به صورت زیر تعریف شده است

$$dy = f'(x)\,dx$$

دیفرانسیل تابع $Z=f(x,y)$ که دیفرانسیل کامل نامیده میشود به صورت زیر تعریف می شود:

$$dZ = \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)dy$$

مثال ۵ اگر $Z = \mathrm{Arcsin}\,\frac{x}{y}$ ، dZ را بیابید

حل :

$$dZ = (f_x)dx + (f_y)dy$$

$$Z_x = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)_x}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{y}}{\sqrt{\frac{y^2-x^2}{y^2}}} = \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}$$

$$Z_y = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)_y}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}} = \frac{\frac{-x}{y^2}}{\sqrt{\frac{y^2-x^2}{y^2}}} = \frac{-x}{y\sqrt{y^2-x^2}}$$

$$dZ = \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\,dx + \frac{-x}{y\sqrt{y^2-x^2}}\,dy$$

مثال ۹ دیفرانسیل کامل تابع $Z=x^y$ را بیابید

حل :

$$dZ = Z_x \cdot dx + Z_y \cdot dy$$

$$\begin{aligned} Z_x &= yx^{y-1} \\ Z_y &= x^y \ln x \end{aligned} \longrightarrow dZ = (yx^{y-1})dx + (x^y \ln x)dy$$

$$(a^u)' = u'a^u \ln a$$

* دیفرانسیل یک تابع در واقع بیانگر مقدار تقریبی تغییرات تابع $f(x)$ یا $f(x,y)$ بوده و به کمک آن می توان مقدار تقریبی $f(x)$ را در یک نقطه محاسبه نمود. این مورد برای تابع $y=f(x)$ به شرح زیر است

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \qquad \Delta y \simeq dy$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

$\longrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} \simeq f'(x) \longrightarrow$ مقدار تقریبی تغییرات تابع $\simeq f'(x) \cdot \Delta x$

$$f(\alpha+\Delta x) - f(\alpha) \simeq f'(\alpha)\Delta x$$

$f(\alpha+\Delta x) \simeq f(\alpha) + f'(\alpha)\Delta x$ مقدار تقریبی $f(x)$ در $x=\alpha+\Delta x$

مثال ۱۰ مطلوبست مقدار تقریبی $A = \sqrt{4/1}$.

حل: فرض کنید $f(x)=\sqrt{x}$، به این ترتیب هدف محاسبه تقریبی $f(4/1)$ است. اگر $x = 4/1$، می توان نوشت

$$x = 4 + 0/1 \longrightarrow f(4/1) \simeq f(4) + f'(4)\cdot(0/1)$$

$$x = \alpha + \Delta x \qquad \sqrt{4/1} \simeq \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(0/1)$$

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} \\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases} \qquad \sqrt{4/1} \simeq 2 + \frac{1}{40} = 2/025$$

$$\text{(واقعی)}\ \sqrt{4/1} \simeq 2/0248457$$

برای تابع $Z=f(x,y)$ می توان به طور مشابه، مقدار تقریبی ΔZ را به کمک دیفرانسیل کامل dZ تخمین زد

$$\Delta Z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \simeq dy = f_x \cdot dx + f_y \cdot dy$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \simeq f(x,y) + f_x \cdot \Delta x + f_y \cdot \Delta y$$

به این ترتیب مقدار تقریبی تابع $Z=f(x,y)$ در نقطه $\begin{array}{l}x=\alpha+\Delta x\\ y=\beta+\Delta y\end{array}$ به شکل زیر استخراج می‌شود:

$$f(\alpha+\Delta x,\ \beta+\Delta y)\simeq f(\alpha,\beta)+(f_x)_{(\alpha,\beta)}\cdot\Delta x+(f_y)_{(\alpha,\beta)}\cdot\Delta y$$

مثال ۱۱ مقدار تقریبی عبارات زیر را بیابید.

$$(1)\ \sqrt{(4.05)^2+(2.93)^2}\quad,\quad(2)\ (1.02)^{3.01}$$

حل

$$(1)\ \sqrt{(4.05)^2+(2.93)^2}=\sqrt{(4+0.05)^2+(3-0.07)^2}$$

$$\alpha=4\ ,\ \beta=3\ ,\ \Delta x=0.05\ ,\ \Delta y=-0.07$$

$$Z=\sqrt{x^2+y^2}\ \rightarrow\ \frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ,\ \frac{\partial Z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f(4.05,\ 2.93)\simeq f(4,3)+\left[f_x(4,3)\right]\cdot(0.05)+\left[f_y(4,3)\right](-0.07)$$

$$f_x(4,3)=\frac{4}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{4}{5}\quad,\quad f_y(4,3)=\frac{3}{5}$$

$$\sqrt{(4.05)^2+(2.93)^2}\simeq\sqrt{25}+\left(\frac{4}{5}\right)(0.05)+\left(\frac{3}{5}\right)(-0.07)$$

$$\simeq 4.998$$

مقدار واقعی

$$\sqrt{24.9874}\simeq 4.998739$$

$$(2)\quad Z=x^y\ \rightarrow\ (1.02)^{3.01}=(\underset{\alpha}{1}+\underset{\Delta x}{0.02})^{\overset{\beta}{3}+\underset{\Delta y}{0.01}}$$

$$f(x,y)\simeq f(\alpha,\beta)+f_x(\alpha,\beta)\cdot\Delta x+f_y(\alpha,\beta)\,\Delta y$$

$$Z = x^{y} \rightarrow \begin{cases} Z_x = y x^{y-1} \longrightarrow Z_x(1,3) = 3\cdot(1)^2 = 3 \\ Z_y = x^{y}\ln x \qquad Z_y(1,3) = 1^3\cdot \ln(1) = 0 \end{cases}$$

$$\Delta Z \simeq f_x \cdot \Delta x + f_y \cdot \Delta y$$

$$x = 1 + 0.02 = 1.02$$

$$y = 3 + 0.01 = 3.01$$

$$Z(1.02\,,\,3.01) = (1.02)^{3.01} \simeq (1)^3 + (3)(0.02) + (0)(0.01)$$

$$\simeq 1.06$$

تمرینات

مشتق جزئی مرتبه اول توابع داده شده را نسبت به متغیرهای x، y و z بیابید

1. $Z = e^{\sin\frac{y}{x}}$
2. $Z = \sin^{-1}\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$
3. $Z = \ln\sin\dfrac{x+a}{\sqrt{y}}$
4. $Z = \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$
5. $u = (xy)^{z}$
6. $u = z^{xy}$

درستی روابط داده شده در سمت راست را برای توابع زیر بررسی نمائید

7. $u = e^{x}(x\cos y - y\sin y)$ ، $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
8. $u = \ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ، $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
9. $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ، $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

10. $\Phi(cx-bz,\, cy-bz)=0$ و $z=f(x,y)$ $\longrightarrow aZ_x + bZ_x = c$

11. $Z = x\Phi(x+y) + yH(x+y)$, $Z_{xx} - 2Z_{xy} + Z_{yy} = 0$

12. $Z = \frac{1}{y}\left[\Phi(ax+y) + \Psi(ax-y)\right]$

$$\longrightarrow \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{a^2}{y^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

13. $u = xe^{y} + ye^{x}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = x\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2} + y\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}$

دیفرانسیل کامل هریک از توابع زیر را بدست آورید

14. $Z = \sin(xy)$, 15. $Z = tg^{-1}(xy)$

16. $u = x^{yz}$, 17. $u = \ln(x^3+2y^3-z^3)$

مقدار تقریبی توابع زیر را در نقاط داده شده بیابید

18. $Z = x+y-\sqrt{x^2+y^2}$, $Z(3.1 , 4.2) = ?$

$\alpha = 3$, $\beta = 4$,

19. $Z = \frac{x+3y}{y-3x}$, $\alpha = 2.5$, $\beta = 3.5$, $Z(2.6 , 3.4)$

20. $\ln\left(\sqrt[3]{1.03} + \sqrt[4]{0.98} - 1\right) \approx ?$