* قضیه ۲ *

اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ باشند، آنگاه این دو تابع مستقل خطی اند اگر و تنها اگر برای هر $x \in I$

$$W(y_1, y_2) \neq 0$$

مثال - به سادگی می توان نشان داد که توابع $y_1 = \sin x$ و $y_2 = \cos x$ جواب های معادله $y'' + y = 0$ هستند

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot g\, x \xrightarrow{\text{تابعی از } x \text{ اند}} \text{مستقل خطی اند}$$

$W(y_1, y_2)$ را بدست می آوریم

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2 = (\sin x)(-\sin x) - (\cos x)(\cos x)$$

$$= -\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0$$

* تعریف *

اگر y_1 و y_2 جواب های معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ باشند و $W(y_1, y_2) \neq 0$، آنگاه y_1 و y_2 را جواب های اساسی معادله گویند.

* نکته مهم *

اگر y_1 و y_2 جواب های اساسی معادله باشند، آنگاه هر جوابی که در معادله صدق کند می تواند بشکل زیر نوشته شود

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

مثال ۱: توابع $y_1 = e^{x}$ و $y_2 = e^{2x}$ جواب های اساسی معادله $y'' - 3y' + 2y = 0$ هستند و تابع $y = 3e^{x} - 2e^{2x}$ نیز در معادله طبق قضیه ۱ صدق می کند زیرا اینجا می توان نوشت

$$c_1 = 3 \quad \longrightarrow \quad y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$$
$$c_2 = -2$$

در واقع y_1 و y_2 جواب های اساسی هستند زیرا

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2 = e^{x}(e^{2x})' - (e^{x})'(e^{2x})$$
$$= 2e^{3x} - e^{3x} = e^{3x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

البته چون $\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{2x}}{e^{x}} = e^{x}$، پس مستقل خطی اند و طبق قضیه ۲ $W(y_1, y_2) \neq 0$، پس جواب های اساسی معادله اند.

مثال ۲: به سادگی مشاهده می گردد که توابع $y_1 = \sin x$ و $y_2 = -2\sin x$ در معادله $y'' + y = 0$ صدق می کنند زیرا

$$(\sin x)'' + (\sin x) = (-\sin x) + (\sin x) = 0 \checkmark$$
$$(-2\sin x)'' + (-2\sin x) = (2\sin x) + (-2\sin x) = 0 \checkmark$$

ولی y_1 و y_2 وابسته خطی اند

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{-2} \longrightarrow W = 0 \longrightarrow$$ y_1 و y_2 جواب های اساسی معادله نیستند

اکنون تابع $y_3 = \cos x + 3\sin x$ را در نظر بگیرید، این تابع جواب معادله نیز می باشد زیرا

$$y_3 = \cos x + 3\sin x \begin{cases} \longrightarrow y_3' = -\sin x + 3\cos x \\ \longrightarrow y_3'' = -\cos x - 3\sin x \longrightarrow y_3'' + y_3 = 0 \checkmark \end{cases}$$

ولی هیچگاه نمی توان y_3 را به صورت $y_3 = c_1 y_1 + c_2 y_2$ بدست آورید. دلیل آن اینست که y_1 و y_2 اساسی نیستند زیرا

$$W(y_1, y_2) = 0$$

روش کاهش مرتبه

فرض کنید $y_1(x)$ جوابی از معادله $y'' + P(x)y' + q(x)y = 0$ باشد، می توان با تعویض متغیر $y = y_1 \cdot v$ که $v = v(x)$ تابع مجهول می باشد، به شکل زیر معادله را حل نمود.

در واقع نشان میدهیم که $y = y_1$ جواب عمومی آن است

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = y_1 \underbrace{\left(c_1 + \frac{c_2}{y_1} y_2\right)}_{Z}$$

$$y_1'' + P y_1' + q y_1 = 0$$

$$y = y_1 Z \begin{cases} y' = y_1' Z + y_1 Z' \\ y'' = y_1'' Z + y_1' Z' + y_1' Z' + y_1 Z'' \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad y_1 v'' + (2y_1' + P y_1) v' = 0$$

$$\frac{v''}{v'} = -2\left(\frac{y_1'}{y_1}\right) - P(x)$$

$$* \quad \boxed{v'(x) = \frac{c_1}{y_1^2} e^{-\int P(x)\,dx}} \quad *$$

توجه اگر چنانچه در یک مساله تابع y_1 را نداشته باشیم، باید آن را حدس بزنیم می توان مشابه روش ریکاتی در معادله مرتبه اول، y_1 را در قالب توابعی مانند $\pm x$، $e^{\pm x}$، $\sin x$ و $\cos x$ حدس زد.

مثال ۱: ابتدا جوابی مانند y_1 برای معادله دیفرانسیل زیر حدس زده و سپس به کمک آن جواب عمومی معادله را بیابید

$$x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$$

حل: اگر $x = y_1$ فرض نمائیم داریم $\begin{cases} y_1' = 1 \\ y_1'' = 0 \end{cases}$ و با قرار دادن در معادله خواهیم داشت

$$0 - x(1) + x = 0 \checkmark$$

یعنی $y_1 = x$ جوابی از معادله است

قبل از اینکه به کمک روش کاهش مرتبه اقدام به حل مسأله نمائیم ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$y'' + \left[\frac{-1}{x(\ln x - 1)}\right]y' + \frac{1}{x^2(\ln x - 1)}y = 0$$

به این ترتیب

$$p(x) = \frac{-1}{x(\ln x - 1)}$$

$$y = y_1 v = xv \qquad , \qquad \boxed{v' = \frac{c_1}{y_1^2} e^{-\int p\,dx}}$$

$$\int p\,dx = -\int \frac{dx}{x(\ln x - 1)} = -\int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x - 1}dx$$

$$= -\ln(\ln x - 1)$$

$$\to e^{-\int p\,dx} = e^{\ln(\ln x - 1)} = \ln x - 1$$

$$v' = \frac{c_1}{(x)^2} \cdot (\ln x - 1)$$

$$v = C_1 \int \frac{1}{x^2} (\ln x - 1)\, dx$$

$$\left(\frac{1}{x} \ln x\right)' = \frac{-1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2} (\ln x - 1)$$

$$v = -C_1\left(\frac{1}{x} \ln x\right) + C_2$$

$$y = y_1 v = x\left[\left(-\frac{C_1}{x} \ln x\right) + C_2\right]$$

$$y = (-C_1)(\underbrace{\ln x}_{y_2}) + (C_2)(\underbrace{x}_{y_1})$$

مثال ۲- اگر $y_1 = \cos(\sin x)$ یک جواب از معادله زیر باشد،
جواب عمومی را بیابید

$$y'' + (\operatorname{tg} x) y' + (\cos^2 x) y = 0$$

حل:

$$y = y_1 v = v \cdot \cos(\sin x)$$

$$p(x) = \operatorname{tg} x \rightarrow \int p(x)\, dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx$$

$$\int p\, dx = -\ln(\cos x)$$

$$\rightarrow e^{-\int p\, dx} = e^{\ln(\cos x)} = \cos x$$

۱۳

$$v'(x) = \frac{C_1}{y_1^2} e^{-\int p\,dx}$$

$$v' = \frac{C_1}{\cos^2(\sin x)} (\cos x)$$

$$\rightarrow v = C_1 \int \frac{(\cos x)\,dx}{\cos^2(\sin x)}$$

$$u = \sin x \rightarrow du = (\cos x)\,dx$$

$$\rightarrow v = C_1 \int \frac{du}{\cos^2 u} = C_1 \int (1+\operatorname{tg}^2 u)\,du$$

$$v = C_1 \operatorname{tg} u + C_2$$

$$\longrightarrow v = C_1 \operatorname{tg}(\sin x) + C_2$$

$$y = y_1 v = [\cos(\sin x)]\left[C_1 \frac{\sin(\sin x)}{\cos(\sin x)} + C_2\right]$$

$$y = C_1 \underbrace{[\sin(\sin x)]}_{y_2(x)} + C_2 \underbrace{[\cos(\sin x)]}_{y_1(x)}$$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت

$$ay'' + by' + cy = 0$$

در اینجا فرض می‌کنیم a ، b و c حقیقی باشند.

$$y = e^{mx} \longrightarrow \begin{cases} y' = me^{mx} \\ y'' = m^2 e^{mx} \end{cases}$$

$$a(m^2 e^{mx}) + b(me^{mx}) + c(e^{mx}) \equiv 0$$

$$(am^2 + bm + c)e^{mx} \equiv 0$$

$$\boxed{am^2 + bm + c = 0 \quad \text{معادله مفسر}}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

① $\Delta > 0$ $\quad m_1 \neq m_2$ دو ریشه متمایز

$$\longrightarrow \begin{matrix} y_1 = e^{m_1 x} \\ y_2 = e^{m_2 x} \end{matrix} \longrightarrow y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$$

مثال: جواب عمومی معادله $y'' - 5y' + 6y = 0$ را بیابید.

حل:

$$y = e^{mx} \longrightarrow (m^2 - 5m + 6)e^{mx} = 0$$

$$m^2 - 5m + 6 = 0 \longrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 3 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} m = 2 \longrightarrow y_1 = e^{2x} \\ m = 3 \longrightarrow y_2 = e^{3x} \end{matrix} \longrightarrow y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

h : homogenous

(۲) $\Delta = 0 \longrightarrow m = m_1 = m_2$

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b}{2a} \longrightarrow y_1 = e^{(\frac{-b}{2a})x}$$

برای بدست آوردن y_2 از روش کاهش مرتبه استفاده می‌کنیم

$$ay'' + by' + cy = 0$$

$$y'' + \left(\frac{b}{a}\right)y' + \left(\frac{c}{a}\right)y = 0 \longrightarrow P = \frac{b}{a}, \quad \int P\,dx = \frac{b}{a}x$$

$$y = y_1 v \longrightarrow v' = \frac{c_1}{\left(e^{\frac{-b}{2a}x}\right)^2} e^{-\int \frac{b}{a}dx}$$

$$\longrightarrow v' = c_1 \longrightarrow v = c_1 x + c_2$$

$$y_1 = e^{m_1 x} \longrightarrow y = e^{m_1 x}(c_1 x + c_2)$$

$$\longrightarrow y_h = (c_2)(\underbrace{e^{m_1 x}}_{y_1}) + (c_1)(\underbrace{x e^{m_1 x}}_{y_2})$$

مثال - جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

$$\longrightarrow (m^2 - 6m + 9)e^{mx} = 0$$

$$m^2 - 6m + 9 = 0 \longrightarrow m = 3$$

$$y_1 = e^{3x}, \quad y_2 = x e^{3x}$$

$$\longrightarrow y_h = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} = (c_1 + c_2 x)e^{3x}$$

۱۴

$\Delta < 0 \qquad m = \alpha \pm i\beta$

$$y_1 = e^{m_1 x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i(\beta x)}$$

$$y_2 = e^{m_2 x} = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x - i\beta x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i(\beta x)}$$

$$i = \sqrt{-1}$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad \text{رابطه اویلر}$$

$$= \operatorname{cis}(\theta)$$

$$\theta = \pi$$

$$\boxed{e^{i\pi} = -1}$$

$$y_1 = e^{\alpha x}(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad \theta = \beta x$$

$$y_2 = e^{\alpha x}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$Y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x) \quad , \quad Y_2 = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

$$\longrightarrow y_h = C_1 Y_1 + C_2 Y_2$$

$$y_h = \left[C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)\right]e^{\alpha x}$$

مثال - جواب معادله دیفرانسیل زیر را بیابید

$$y'' + y' + 3y = 0 \longrightarrow \begin{aligned} & m^2 + m + 3 = 0 \\ & m = \frac{-1 \pm \sqrt{1-12}}{2} \\ & m = \underbrace{\left(\frac{-1}{2}\right)}_{\alpha} \pm i\underbrace{\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)}_{\beta} \end{aligned}$$

$$y_1 = e^{\frac{-1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{11}}{2}x\right) \quad , \quad y_2 = e^{\frac{-1}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{11}}{2}x\right)$$

$$\longrightarrow y_h = e^{\frac{-1}{2}x}\left[C_1\cos\left(\frac{\sqrt{11}}{2}x\right) + C_2\sin\left(\frac{\sqrt{11}}{2}x\right)\right]$$