بنام خدا

جلسه چهارم: شنبه ۹۹/۱/۳۰ ساعت ۱۰ ــ ۱۲

توجه :

۱- فایل های PDF با نام موضوع درسی نوشته شده اند.

۲- فایل های ضبط شده با نام تاریخ DE نوشته شده اند.

نام فایل ضبط شده این جلسه: DE 99-1-30

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم

شکل کلی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم به صورت زیر است

$$H(x)\,y'' + G(x)\,y' + N(x)\,y = M(x)$$

$$H(x) \rightarrow \quad y'' + \frac{G(x)}{H(x)}\,y' + \frac{N(x)}{H(x)}\,y = \frac{M(x)}{H(x)}$$

یا

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = g(x)$$

در حال حاضر فرض می‌کنیم $g(x) = 0$، یعنی

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0 \qquad \text{(I)}$$

این معادله را معادله دیفرانسیل مرتبه دوم همگن گویند

Homogenous DE

مثالهایی از معادله (I)

- $y'' - \frac{1}{x}\,y' + \frac{2}{x^2}\,y = 0$
- $y'' - 3y' + 2y = 0$

می‌دانیم $Dy = \frac{dy}{dx}$ ، $D^2 y = \frac{d^2y}{dx^2}$ ، به این ترتیب

D : عملگر مشتق

می‌توان نوشت

$$D^2 y + p(x)\,Dy + q(x)\,y = 0$$

$$(y = D^0 y)$$

می توان معادله را نیز به شکل زیر نوشت

$$(D^2+PD+q)y=0 \qquad P=P(x),\quad q=q(x)$$

$L=D^2+PD+q$: عملگر مرکب

$$L(y)=0$$

مثال ۱ اگر $y=2x^4$ ، $[D^2+(x-1)D+3]y$ را بدست آورید

حل :

$$[D^2+(x-1)D+3](2x^4)$$
$$=D^2(2x^4)+(x-1)D(2x^4)+3(2x^4)$$
$$=D(8x^3)+(x-1)(8x^3)+6x^4$$
$$=24x^2+8x^4-8x^3+6x^4$$
$$=14x^4-8x^3+24x^2$$

مثال ۲ اگر $y=e^{-2x}$ و $L=2D^4-3D^2$ ، $L(y)$ مطلوبست.

حل: $L=2D^4-3D^2=2D^3(D)-3D(D)$

$$L(e^{-2x})=2D^3(D(e^{-2x}))-3D(De^{-2x})$$
$$=2D^3(-2e^{-2x})-3D(-2e^{-2x})$$
$$=-4D^2(-2e^{-2x})+6(-2e^{-2x})$$
$$=8D(-2e^{-2x})-12e^{-2x}$$
$$=32e^{-2x}-12e^{-2x}=20e^{-2x}$$

قبل از ورود به ارائه روش جهت یافتن جواب عمومی معادله (I)، ابتدا چند تعریف به شکل زیر اشاره می‌نمائیم.

استقلال و وابستگی دو تابع $y_1(x)$ و $y_2(x)$

دو تابع y_1 و y_2 را در فاصله I مستقل خطی گویند، هرگاه به ازاء هر $x \in I$ داشته باشیم

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0$$

آنگاه بایستی $C_1 = C_2 = 0$.

مثال ۱ دو تابع $y_1 = x$ و $y_2 = x^2$ برای هر $x \in R$ مستقل خطی اند زیرا اگر فرض کنیم

$$C_1 x + C_2 x^2 = 0 \quad \forall x \in R$$

آنگاه باید حتماً $C_1 = 0$ و $C_2 = 0$ زیرا اگر $C_1 \neq C_2 \neq 0$، معادله $C_1 x + C_2 x^2 = 0$ فقط در دو نقطه $x = 0$ و $x = \frac{-C_1}{C_2}$ برقرار می‌گردد و نه برای هر $x \in R$، این امکان ندارد مگر $C_1 = C_2 = 0$

مثال ۲ مستقل خطی بودن دو تابع $y_1 = e^x$ و $y_2 = -2e^x$ را بررسی نمائید

حل: اگر برای هر x داشته باشیم $C_1 e^x + C_2(-2e^x) = 0$ آنگاه

$$(C_1 - 2C_2) e^x = 0$$

$$\rightarrow C_1 - 2C_2 = 0 \rightarrow \boxed{C_1 = 2C_2}$$

یعنی الزاماً نباید $C_1 = C_2 = 0$

۴

یعنی y_1 و y_2 وابسته خطی اند.

*** نکته ***

دو تابع y_1 و y_2 مستقل خطی هستند هرگاه نسبت آنها $\frac{y_1}{y_2}$ یا $\frac{y_2}{y_1}$ تابعی از x باشد. اگر چنانچه این نسبت عدد ثابتی بشود، وابسته خطی خواهند بود

برای دو تابع $y_1=x$ و $y_2=x^2$ در مثال ① داریم

$$\frac{y_2}{y_1}=\frac{x^2}{x}=x \longrightarrow$$ تابعی از x است (غیر ثابت)

پس y_1 و y_2 مستقل خطی اند.

برای توابع $y_1=e^x$ و $y_2=-2e^x$ داده شده در مثال ۲ داریم

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{e^x}{-2e^x}=\frac{-1}{2}$$ y_1 و y_2 وابسته خطی اند

رونسکی دو تابع y_1 و y_2 (Wronskian)

رونسکی دو تابع $y_1(x)$ و $y_2(x)$ که تابعی از x است به صورت زیر تعریف می شود

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}=y_1(x)\,y_2'(x)-y_1'(x)\,y_2(x)$$

یا

$$W(x)=y_1 \cdot y_2'-y_1' \cdot y_2$$

۵

مثال ۱: برای دو تابع $y_1 = \sin 2x$ و $y_2 = \cos 2x$ ، $W(x)$ را محاسبه نمائید.

حل:

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2 = (\sin 2x)(\cos 2x)' - (\sin 2x)'(\cos 2x)$$

$$W = (\sin 2x)(-2\sin 2x) - (2\cos 2x)(\cos 2x)$$

$$= -2\sin^2 2x - 2\cos^2 2x$$

$$\boxed{W = -2}$$

مثال ۲: همانند مثال ۱ برای دو تابع x^3 و x عمل نمائید.

حل:

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2 = (x^3)(1) - (3x^2)(x)$$

$$\boxed{W = -2x^3}$$

* نکته *

در مثال ۱ $W = -2$ به ازای هیچ مقداری از x صفر نخواهد شد ولی در مثال ۲ برای $x = 0$ ، $W = 0$.

بعداً در جوابهای معادله مرتبه دوم خطی همگن خواهیم گفت که اگر y_1 و y_2 جوابهای معادله باشند و چنانچه رفتاری مانند مثال‌های ۱ و ۲ داشته باشند، دارای ویژگیهای خاصی خواهند بود.

تمرینات

برای مسائل زیر با توجه به تابع داده شده $\phi(x)$ ، $L[\phi]$ را بدست آورید

۱- $L = D^2 - 5D + 6$ $\qquad \phi(x) = e^{2x}$

$\phi(x) = -e^{3x}$

$\phi(x) = e^{x}$

۲- $L = D^3 + 16D^2$ $\qquad \phi = \cos 4x$

$\phi = \sin 2x$

$\phi = x^2 - 1$

۳- $L = D^4 - 2D + 1$ $\qquad \phi = x^2$

$\phi = e^{x}$

$\phi = \sin x$

رونسکی توابع داده شده زیر را محاسبه و نقطه ای را بدست آورید که به ازای آن $W = 0$

۱- $y_1 = 2x \quad , \quad y_2 = -5x$

۲- $y_1 = x^2 \quad , \quad y_2 = x^4$

۳- $y_1 = \cos 3x \quad , \quad y_2 = \sin 3x$

۷

* قضیه ۱ *

اگر y_1 و y_2 جواب‌های معادله همگن

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

باشند، آنگاه $Y = c_1y_1 + c_2y_2$ نیز جوابی از آن خواهد بود

مثال - اگر $y'' - 3y' + 2y = 0$ ، ابتدا نشان دهید که $y_1 = e^x$ و $y_2 = e^{2x}$ جواب‌های از آن هستند و سپس نشان دهید برای هر a و b ، $Y = ay_1 + by_2$ نیز جوابی از آن خواهد بود

حل :

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$y_1 = e^x : (e^x)'' - 3(e^x)' + 2(e^x) = e^x - 3e^x + 2e^x = 0$$

$$y_2 = e^{2x} : (e^{2x})'' - 3(e^{2x})' + 2(e^{2x}) = 4e^{2x} - 6e^{2x} + 2e^{2x} = 0$$

$$Y = ae^x + be^{2x} \to Y' = ae^x + 2be^{2x}, \quad Y'' = ae^x + 4be^{2x}$$

$$(ae^x + be^{2x})'' - 3(ae^x + be^{2x})' + 2(ae^x + be^{2x})$$

$$= (ae^x + 4be^{2x}) - 3(ae^x + 2be^{2x}) + 2ae^x + 2be^{2x}$$

$$= 0 \times e^x + 0 \times e^{2x} = 0$$