بنام خدا

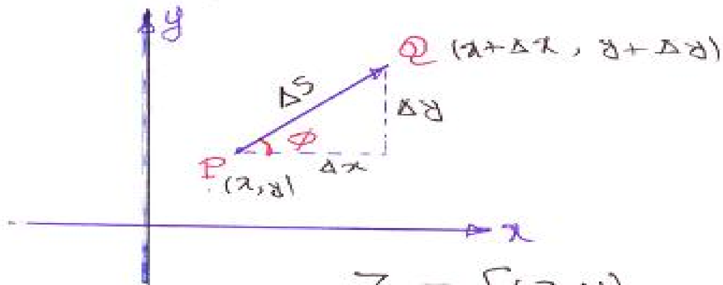
جلسه پنجم: یکشنبه ۹۹/۱/۳۱ ساعت ۱۳:۳۰ – ۱۲:۳۰

نام فایل ضبط شده این جلسه: MATH2 99-1-31

مشتق جهتی یا سوئی

در بخش قبلی مشتق تابع $z=f(x,y)$ را در جهت محورهای x و y تحت عنوان مشتقات جزئی بررسی نمودیم.

اکنون می‌خواهیم نسبت تغییرات تابع $z=f(x,y)$ را در جهتی مثلاً $\overrightarrow{PQ}$ یا بردار $\overrightarrow{PQ}$ بررسی نمائیم



$$Z = f(x,y)$$

$$\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta s}$$

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\overrightarrow{PQ}}^{P} = (f_x)_P \cos\phi + (f_y)_P \sin\phi$$

$\cos\phi$ و $\sin\phi$ را پارامترهای هادی بردار $\overrightarrow{PQ}$ گویند و به شکل زیر تعریف می‌گردند

$$\overrightarrow{PQ} = a\vec{i} + b\vec{j}$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{a^2+b^2} \rightarrow \cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sin\phi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

۷

مثال: اگر $z = x^{2} + y^{2} - xy$، مشتق سوی تابع را در نقطه $P\big|_{-1}^{1}$ در سوی $\vec{PQ}$ که در آن $Q\big|_{2}^{3}$، محاسبه نمایید

حل

$$\vec{PQ} = (3-1)\,\vec{i} + (2+1)\,\vec{j}$$

$$\vec{PQ} = 2\vec{i} + 3\vec{j} \longrightarrow |\vec{PQ}| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$\cos\phi = \frac{2}{\sqrt{13}} \quad , \quad \sin\phi = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$f_x = 2x - y \longrightarrow (f_x)_p = 2(1) - (-1) = 3$$

$$f_y = 2y - x \qquad (f_y)_p = 2(-1) - (1) = -3$$

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_p = f_x \cdot \cos\phi + f_y \cdot \sin\phi$$

$$= (3)\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) + (-3)\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$$

$$= \frac{-3}{\sqrt{13}}$$

$$\frac{df}{ds} = f_x \cdot \cos\phi + f_y \sin\phi$$

$$\vec{\nabla} f = (f_x)\,\vec{i} + (f_y)\,\vec{j}$$ بردار گرادیان

$$\vec{u} = (\cos\phi)\,\vec{i} + (\sin\phi)\,\vec{j} \qquad |\vec{u}| = 1$$ بردار یکان $\vec{PQ}$ یا سوی $\vec{PQ}$

$$\frac{df}{du} = \vec{\nabla} f \cdot \vec{u}$$

$$= |\vec{\nabla} f| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos\gamma$$

γ: زاویه بین بردارهای $\vec{u}$ و $\vec{\nabla} f$

اگر $\theta = 0$ ، آنگاه $\frac{df}{du} = |\vec{\nabla} f|$ ، که در واقع بیشترین مقدار است. یعنی اگر در سوی گرادیان تغییرات تابع $z = f(x,y)$ را در نظر بگیریم، بیشترین تغییرات را خواهیم داشت.

اگر $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، آنگاه $\frac{df}{du} = 0$ ، یعنی هیچ تغییری برای z نخواهیم داشت.

اگر $\theta = \pi$ ، آنگاه $\frac{df}{du} = -|\vec{\nabla} f|$ ، یعنی کمترین مقدار تغییرات را خواهیم داشت.

فرمول های مشتق - مشتق تابع مرکب - تابع ضمنی

$$\rightarrow (u^m)' = m u' u^{m-1}$$

مثال: اگر $z = \frac{1}{\sqrt[3]{x^3y^2 - 3x}}$ ، مطلوبست z_x ، z_y.

حل:

$$z = (x^3y^2 - 3x)^{-\frac{1}{3}}$$

$$z_x = \frac{-1}{3}(3x^2y^2 - 3)(x^3y^2 - 3x)^{-\frac{4}{3}}$$

$$z_y = \frac{-1}{3}(2x^3y)(x^3y^2 - 3x)^{-\frac{4}{3}}$$

$$\rightarrow (e^u)' = u'e^u$$

$$(a^u)' = u'a^u \ln a \quad ,(a>0)$$

۹

مثال: اگر $Z = 3^{\sin xy^2 - e^{2xy}}$ ، مطلوبست Z_x , Z_y

حل:
$$Z_x = \left(\sin xy^2 - e^{2xy}\right)_x 3^{\sin xy^2 - e^{2xy}} \cdot \ln 3$$
$$= \left(y^2 \cos xy^2 - 2y e^{2xy}\right) \cdot 3^{\sin xy^2 - e^{2xy}} \cdot \ln 3$$

$$\longrightarrow \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u} \quad , \quad (\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$$

مثال
$$Z = \ln\left(\operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x}\right)$$
$$Z_x = \frac{\left(\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}\right)_x}{\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}} = \frac{\dfrac{\left(\frac{y}{x}\right)_x}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}{\operatorname{tg}^{-1}(x)}$$
$$= \frac{\dfrac{0-y}{x^2}}{\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}} = \frac{-y}{(x^2+y^2)\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}}$$
$$Z_y = \frac{\dfrac{(y/x)_y}{1+(y/x)^2}}{\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}} = \frac{\frac{1}{x}}{\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}}$$

مشتق تابع مرکب

$$Z = f(u) \quad , \quad u = u(x,y)$$
$$Z_x = f_u \cdot u_x \quad , \quad Z_y = f_u \cdot u_y$$

مثال ۱: اگر $Z = 3u^2 - e^u$ و $u = \ln(x - 3y^2)$ ، مطلوبست Z_x , Z_y.

حل:
$$Z_x = Z_u \cdot u_x = (6u - e^u)\left(\frac{1}{x-3y^2}\right)$$
$$Z_y = Z_u \cdot u_y = (6u - e^u)\left(\frac{-6y}{x-3y^2}\right)$$

مثال ۲. برای تابع $Z=f(x^3y^2)$ ، Z_x و Z_y را بیابید.

حل :

$$u = x^3y^2 \quad \begin{cases} u_x = 3x^2y^2 \\ u_y = 2x^3y \end{cases}$$

$$Z = f(u) \longrightarrow Z_x = f_u \cdot u_x = f_u \cdot (3x^2y^2)$$

$$Z_y = f_u \cdot u_y = f_u \cdot (2x^3y)$$

مشتق جزئی برای تابع $Z=f(u,v)$ که $u=u(x,y)$ ، $v=v(x,y)$

طبق چند تعریف و قضیه می‌توان نشان داد

$$Z = f(u,v) \qquad u=u(x,y), \quad v=v(x,y)$$

$$Z_x = f_u \cdot u_x + f_v \cdot v_x$$

$$Z_y = f_u \cdot u_y + f_v \cdot v_y$$

مثال ۳. اگر $Z = f(e^{xy}, x^2y^2)$ ، مطلوبست Z_x و Z_y

$$u = e^{xy}, \quad v = x^2y^2$$

$$Z_x = f_u \cdot u_x + f_v \cdot v_x = f_u \cdot (ye^{xy}) + f_v \cdot (2xy^2)$$

$$Z_y = f_u \cdot u_y + f_v \cdot v_y = f_u \cdot (xe^{xy}) + f_v (2x^2y)$$

مثال ۲. اگر $u = e^{x-2y}$ و $x=\sin t$ و $y=t^3$ ،
$\frac{du}{dt}$ را بدست آوریم

حل:

$$u=f(x,y)=e^{x-2y} \begin{cases} f_x = e^{x-2y} \\ f_y = -2e^{x-2y} \end{cases}$$

$$x=x(t)=\sin t$$

$$y=y(t)=t^3$$

$$\frac{du}{dt}=f_x\cdot x_t+f_y\cdot y_t=(e^{x-2y})(\cos t)+(-2e^{x-2y})(3t^2)$$

مثال ۳. اگر $z=x^2\ln y$ ، $x=\frac{u}{v}$ و $y=3u-2v$ ،
مطلوبست $\frac{\partial z}{\partial u}$ و $\frac{\partial z}{\partial v}$.

حل:

$$z=x^2\ln y \begin{cases} z_x = 2x\ln y \\ z_y = \frac{x^2}{y} \end{cases}$$

$$x=\frac{u}{v} \begin{cases} x_u = \frac{1}{v} \\ x_v = \frac{-u}{v^2} \end{cases}$$

$$y=3u-2v \begin{cases} y_u = 3 \\ y_v = -2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)=(2x\ln y)\left(\frac{1}{v}\right)+\left(\frac{x^2}{y}\right)(3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=z_x\cdot x_v+z_y\cdot y_v=(2x\ln y)\left(\frac{-u}{v^2}\right)+\left(\frac{x^2}{y}\right)(-2)$$

* نکته *

تابع ضمنی $f(x, y) = 0$ را در نظر بگیرید. اگر بخواهیم مشتق y را نسبت به x بدست آوریم می‌توانیم با استفاده از دستور فوق به شرح زیر عمل نمود

$$u = x, \quad v = y \quad ; \quad f = f(u, v) = 0$$

$$f_u \cdot u_x + f_v \cdot v_x = 0 \qquad u = x \rightarrow u_x = 1, \quad v = y \rightarrow v_x = y'$$

$$\rightarrow f_u \cdot (1) + f_v \cdot (y') = 0$$

$$\rightarrow y' = -\frac{f_u}{f_v} = -\frac{f_x}{f_y}$$ مشتق تابع ضمنی

مثال ۴: اگر $3x + x^3y^4 - 2\sin xy = 0$، y' را بدست آورید.

حل:

$$y' = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{3 + 3x^2y^4 - 2y\cos xy}{0 + 4x^3y^3 - 2x\cos xy}$$

مثال ۵: فرض کنید $w = f(u, v)$، که در آن $u = x + at$ ، $v = y + bt$ نشان دهید

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y}$$

حل:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = f_u \cdot u_t + f_v \cdot v_t = af_u + bf_v$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f_u \cdot \underset{1}{u_x} + f_v \cdot \underset{0}{v_x} = f_u$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = f_u \cdot \underset{0}{u_y} + f_v \cdot \underset{1}{v_y} = f_v$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a f_u + b f_v = a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y}$$

مثال ۶ نشان دهید اگر $Z = xy + x\phi\left(\frac{y}{x}\right)$ آنگاه

$$x\frac{\partial Z}{\partial x} + y\frac{\partial Z}{\partial y} = xy + Z$$

حل:

$$u = \frac{y}{x} \longrightarrow \phi = \phi(u)$$

$$\phi_x = \phi_u \cdot u_x = \phi_u \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right)$$

$$\phi_y = \phi_u \cdot u_y = \phi_u\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = y + \phi + x\phi_x = y + \phi + x\left(\frac{-y}{x^2}\right)\phi_u$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = x + x\phi_y = x + x\left(\frac{1}{x}\right)\phi_u$$

$$x\frac{\partial Z}{\partial x} = xy + x\phi - y\phi_u$$

$$y\frac{\partial Z}{\partial y} = xy + y\phi_u$$

$$x\frac{\partial Z}{\partial x} + y\frac{\partial Z}{\partial y} = xy + \underbrace{(xy + x\phi)}_{Z}$$

$$= xy + Z$$