بنام خدا

جلسه چهارم: شنبه ۹۹/۱/۳۰ ساعت ۸ ــ ۱۰

توجه :

۱- فایل های PDF با نام موضوع درسی نوشته شده اند.

۲- فایل های ضبط شده با نام تاریخ MATH2 نوشته شده اند.

نام فایل ضبط شده این جلسه: MATH2 99-1-30

مشتق توابع چند متغیره

مشتقات جزئی

در تابع یک متغیره $y = f(x)$ ، مشتق تابع به شکل زیر تعریف می‌گردد

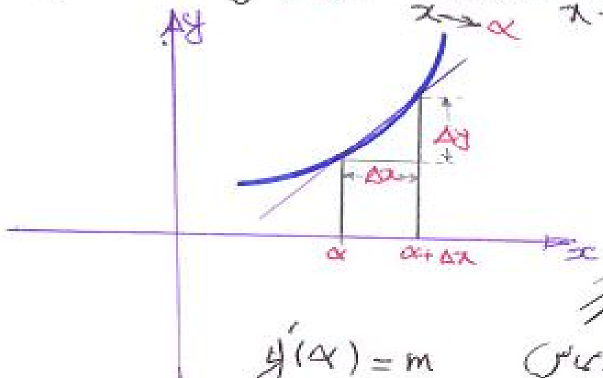
$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

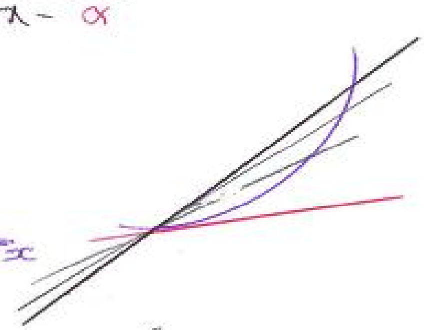
$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

$$x = \alpha \longrightarrow \quad f'(\alpha) = \lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$$

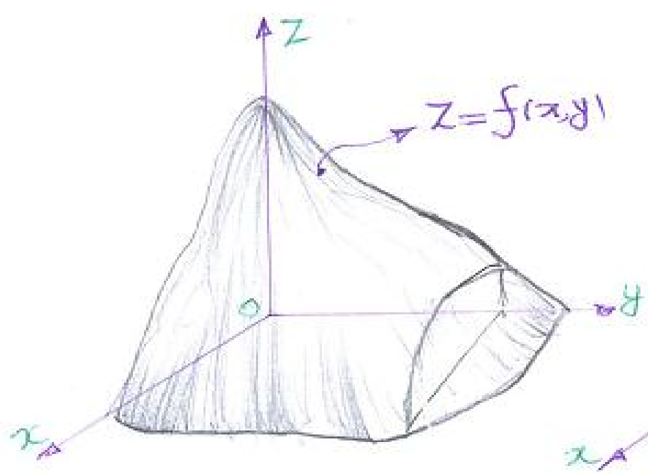
$x = \alpha + \Delta x$

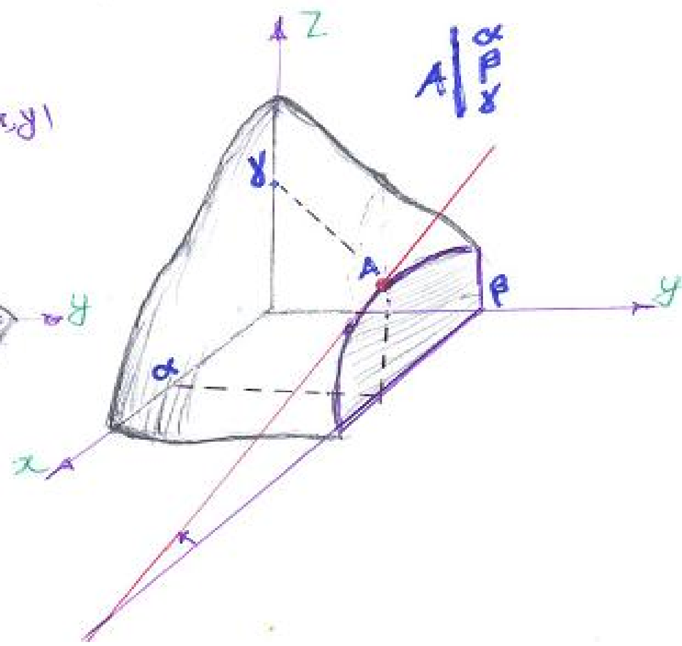
$\Delta x = x - \alpha$





$y'(\alpha) = m$ شیب خط مماس





$$x \to x+\Delta x \qquad \alpha \to \alpha+\Delta x \qquad x = \alpha+\Delta x$$
$$y \to y+\Delta y \quad \longrightarrow \quad \beta \to \beta+\Delta y \quad \longrightarrow \quad y = \beta+\Delta y$$

$$Z_x = \frac{\partial Z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{\substack{x=\alpha \\ y=\beta}} = \lim_{\substack{x \to \alpha \\ y=\beta \\ (x,\beta)\to(\alpha,\beta)}} \frac{f(x,\beta) - f(\alpha,\beta)}{x-\alpha} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x}(\alpha, \beta) = \left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{(\alpha,\beta)}$$

رابطه (1) را مشتق جزئی تابع در نقطه (α, β) نسبت
به x گویند.

بطور مشابه برای y داریم

$$Z_y = \frac{\partial Z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_{(\alpha,\beta)} = \lim_{y \to \beta} \frac{f(\alpha,y) - f(\alpha,\beta)}{y-\beta} \qquad (2)$$

به این ترتیب روابط (1) و (2) را مشتقات جزئی
به ترتیب نسبت به x و y گویند.

به چند مثال زیر توجه نمائید

مثال ۱: اگر $Z = 3x^2 - 2xy + y^2$ ، مطلوبست

$$Z_x \quad , \quad Z_y$$

حل: برای Z_x داریم

$$Z_x = \frac{\partial Z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$f(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2$$

$$f(x+\Delta x, y) = 3(x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x)y + y^2$$

$$= 3x^2 + 6x\Delta x + (\Delta x)^2 - 2xy - 2(\Delta x)y + y^2$$

$$f(x+\Delta x, y) - f(x,y) = 6x\Delta x + (\Delta x)^2 - 2(\Delta x)y$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\Delta x + (\Delta x)^2 - 2y\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (6x + \Delta x - 2y)$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\partial Z / \partial x = 6x - 2y}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

$$f(x, y+\Delta y) = 3x^2 - 2x(y+\Delta y) + (y+\Delta y)^2$$

$$= 3x^2 - 2xy - 2x\Delta y + y^2 + 2y\Delta y + (\Delta y)^2$$

④ $f(x, y+\Delta y) - f(x, y) = -2x\Delta y + 2y\Delta y + (\Delta y)^2$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-2x\Delta y + 2y\Delta y + (\Delta y)^2}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} (-2x + 2y + \Delta y)$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y}$$

مثال ۲ برای تابع Z در مثال ① ، Z_x ، Z_y را در نقطه (۳,−۲) محاسبه نمایید.

حل:

$f = 3x^2 - 2xy + y^2$

$$Z_x(3,-2) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x,-2) - f(3,-2)}{x-3}$$

$$f(3,-2) = 3(3)^2 - 2(3)(-2) + (-2)^2 = 27 + 12 + 4 = 43$$

$$\to Z_x(3,-2) = \lim_{x \to 3} \frac{[3x^2 - 2x(-2) + (-2)^2] - 43}{x-3}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{3x^2 + 4x - 39}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{(3x+13)(x-3)}{x-3}$$

$[Z_x(3,-2) = 22]$

$$3\left(x^2 + \frac{4}{3} - 13\right) = 0 \qquad x = \frac{-\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} + 52}}{2} = \frac{-2 \pm 11}{3} \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{-13}{3} \end{cases}$$

$$3\left(x^2 + \frac{4}{3} - 13\right) = 3(x - x_1)(x - x_2) = 3(x-3)\left(x + \frac{13}{3}\right)$$

$$= (3x+13)(x-3)$$

۵

$$Z_y(3,-2)=\lim_{y\to -2}\frac{f(3,y)-f(3,-2)}{y-(-2)}$$

$$f(x,y)=3x^2-2xy+y^2 \quad , \quad f(3,-2)=43$$

$$f(3,y)=3(3)^2-2(3)y+y^2$$

$$Z_y(3,-2)=\lim_{y\to -2}\frac{[27-6y+y^2]-(43)}{y+2}$$

$$=\lim_{y\to -2}\frac{y^2-6y-16}{y+2}=\lim_{y\to -2}\frac{(y+2)(y-8)}{y+2}$$

$$=\lim_{y\to -2}(y-8)=-10$$

$$\longleftrightarrow \boxed{Z_y(3,-2)=-10}$$

$$\boxed{\begin{array}{l|l} y^2-6y-16 & y+2 \\ \cline{2-2} \underline{-(y^2+2y)} & y-8 \\ -8y-16 & \\ \underline{-(-8y-16)} & \\ 0 & \end{array}}$$

اما با توجه به مثال ① به راحتی می‌توان این مقادیر را بدست آورد

$$Z_x=6x-2y \longrightarrow Z_x(3,-2)=6(3)-2(-2)=22$$

$$Z_y=-2x+2y \longrightarrow Z_y(3,-2)=-2(3)+2(-2)=-10$$

روش‌های حل شده در مثال ① و ② را روش‌های مستقیم گویند.