(1)

حل چند معادله دیفرانسیل

جواب معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید

(1)

$$1-\frac{y}{y'^2} = -\frac{x}{y'}$$

با ضرب طرفین در y'^2 داریم

$$y = xy' + y'^2$$

معادله کلرو

$$y'=P \longrightarrow y' = P = P + x\frac{dP}{dx} + 2P\frac{dP}{dx}$$

$$\longrightarrow (x+2P)\frac{dP}{dx}=0 \longrightarrow \frac{dP}{dx}=0$$

$$P=C$$

$$\longrightarrow y = xP+P^2 \longrightarrow \boxed{y=Cx+C^2}$$

$C=0 \to y=0$, $C=-2 \to y=-2x+4$

$C=1 \to y=x+1$, $\vdots$

جواب عمومی مجموعه ای از خطوط است

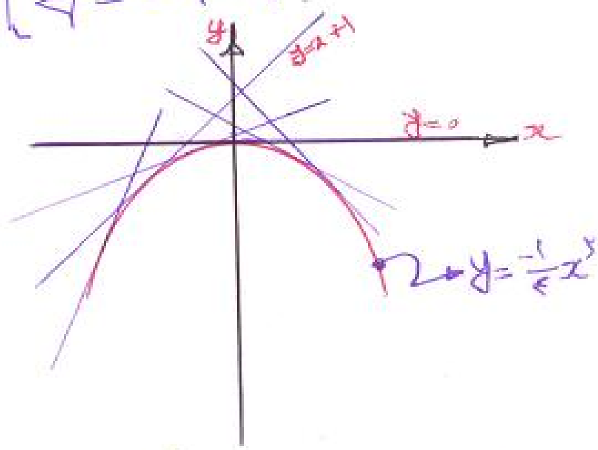
$$x+2P=0 \longrightarrow \begin{cases} x=-2P \longrightarrow P=\frac{-x}{2} \\ y=xP+P^2 \end{cases}$$

$$y = x\left(\frac{-x}{2}\right) + \left(\frac{-x}{2}\right)^2$$

$$y=\frac{-1}{4}x^2$$

جواب غیرعادی

یا پوش جواب عمومی



$$dx + 2xy\,dy = y e^{-y^2} dy$$

۲

$$dx + (2xy - y e^{-y^2}) dy = 0$$

$M = 1 \longrightarrow M_y = 0$

$N = 2xy - y e^{-y^2} \longrightarrow N_x = 2y \longrightarrow M_y \neq N_x$

کامل نیست

اگر به dx تقسیم کنیم، خطی هم نیست

$$(2xy - y e^{-y^2}) y' = 1$$

$H(x)\,y' + F(x)\,y = G(x)$

معادله خطی

همچنین همگن نیست

$$y' = \frac{1}{2xy - y e^{-y^2}} = \frac{\frac{1}{x}}{2y - \frac{y}{x} e^{-y^2}}$$

اگر طرفین معادله در صورت مساله را به dy تقسیم کنیم

خطی برحسب x می‌شود

$$\frac{dx}{dy} + (2y)x = y e^{-y^2}$$

عامل انتگرال ساز: $e^{\int 2y\,dy} = e^{y^2}$

$$(x e^{y^2})' = (e^{y^2}) e^{-y^2} = 1$$

از طرفین نسبت به y انتگرال می‌گیریم

$$\boxed{x e^{y^2} = y + C}$$

۳

$(xy-1)dx+(x^2-xy)dy=0$ ۳

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-(xy-1)}{x^2-xy}=-\frac{\frac{y}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{y}{x}}$$ ◁ همگن نیست

$M=xy-1 \rightarrow M_y=x$

$N=x^2y-xy \quad N_x=2x-y \rightarrow M_y\neq N_x$ کامل نیست

$$(x^2-xy)\frac{dy}{dx}+xy-1=0$$

$(x^2-xy)y'+xy=1$ خطی برحسب y نیست

خطی برحسب y: $H(x)y'+F(x)y=G(x)$

$$(xy-1)\frac{dx}{dy}-xy+x^2=0$$

$(xy-1)x'+(-y)x=-x^2$

خطی برحسب x $\longrightarrow M(y)x'+P(y)x=Q(y)$

برنولی برحسب x $\longrightarrow M(y)x'+P(y)x=Q(y)x^m$

پس این معادله نه خطی و نه برنولی برحسب x است

* برمی‌گردیم حالت های عامل انتگرال ساز را که کامل شدن را بررسی کنند *

ممکن است عامل انتگرال ز تابعی برحسب x باشد

$h=h(x) \longrightarrow u=x \begin{cases} u_x=1 \\ u_y=0 \end{cases}$

$h=h(u)$

$$\frac{h_u}{h}=\frac{N_x-M_y}{Mu_y-Nu_x}=\frac{N_x-M_y}{-N}=\frac{(2x-y)-(x)}{-(x^2-xy)}\overset{x=u}{=}\frac{x-y}{-x(x-y)}=\frac{-1}{x}$$

(۴)

$$\frac{h_u}{h} = \frac{-1}{u} \rightarrow \ln h = -\ln u = \ln \frac{1}{u}$$

$$\rightarrow h(u) = \frac{1}{u} \rightarrow \boxed{h(x) = \frac{1}{x}}$$

$$\frac{1}{x}(xy-1)\,dx + \frac{1}{x}(x^2 - xy)\,dy = 0$$

$$\left(y - \frac{1}{x}\right)dx + (x-y)\,dy = 0$$

$$\frac{\partial \left(y - \frac{1}{x}\right)}{\partial y} = 1 \quad , \quad \frac{\partial (x-y)}{\partial x} = 1$$

$$1 = 1 \longrightarrow$$ معادله کامل شد

$$\int \left(y - \frac{1}{x}\right)dx = xy - \ln x + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial [xy - \ln x + \varphi]}{\partial y} = x + \varphi'(y) = N = x - y$$

$$\rightarrow \varphi'(y) = -y \rightarrow \varphi(y) = \frac{-1}{2}y^2$$

$$\rightarrow \boxed{xy - \ln x - \frac{1}{2}y^2 = C}$$

(۴) اگر $h(x,y) = \frac{1}{xy^2}$ عامل انتگرال ساز معادله زیر باشد، ابتدا مقدار α را بدست آورده و به ازای آن جواب عمومی معادله را بدست آورید

$$(xy - 2y^2)\,dx + (3xy + \alpha x^2)\,dy = 0$$

$$\frac{1}{xy^2}(xy - 2y^2)\,dx + \frac{1}{xy^2}(3xy + \alpha x^2)\,dy = 0$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{y} - \frac{2}{x}\right)}_{M}dx + \underbrace{\left(\frac{3}{y} + \frac{\alpha x}{y^2}\right)}_{N}dy = 0$$

(۵)

با توجه به فرض مسأله داریم

$$M = \frac{1}{y} - \frac{2}{x} \rightarrow M_y = \frac{-1}{y^2}$$

$$N = \frac{3}{y} + \frac{\alpha x}{y^2} \rightarrow N_x = \frac{\alpha}{y^2}$$

$$M_y = N_x \quad ,$$

$$\frac{-1}{y^2} = \frac{\alpha}{y^2} \rightarrow (\alpha = -1)$$

$$\xrightarrow{\alpha=-1} \left(\frac{1}{y} - \frac{2}{x}\right)dx + \left(\frac{3}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$$

$$\int \left(\frac{1}{y} - \frac{2}{x}\right)dx = \left(\frac{1}{y}\right)x - 2\ln x + \phi(y)$$

$$\frac{\partial\left[\frac{1}{y}x - 2\ln x + \phi(y)\right]}{\partial y} = N = \frac{3}{y} - \frac{x}{y^2}$$

$$\frac{-x}{y^2} + 0 + \phi'(y) = \frac{3}{y} - \frac{x}{y^2}$$

$$\longrightarrow \phi'(y) = \frac{3}{y} \longrightarrow \boxed{\phi(y) = 3\ln y}$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{x}{y} - 2\ln x + 3\ln y = C \quad \text{جواب عمومی}}$$

$$y' = \frac{x+y+2}{x-y-4}$$

(۵)

اگر $y' = \frac{dy}{dx}$ قرار دهیم خواهیم داشت

$$(x+y+2)dx - (x-y-4)dy = 0$$

$$M = x+y+2 \rightarrow M_y = 1$$

$$N = -(x-y-4) \qquad N_x = -1 \longrightarrow M_y \neq N_x$$

کامل نیست

۶

اگر به dx تقسیم کنیم

$$(-x+y+4)\,y' + y = -x-2$$

نسبت به y خطی نیست

اگر به dy تقسیم می‌کنیم

$$(x+y+2)\,x' - x = -y-4$$

نسبت به x نیز خطی نیست

همگنی را بررسی می‌کنیم

$$y' = \frac{x+y+2}{x-y-4}$$

$$= \frac{1+y/x+2/x}{1-y/x-4/x}$$

همگن نیست

ولی می‌توان با تغییر متغیرهائی به شکل زیر معادله را به همگن تبدیل نمود

$$x = u+\alpha \quad , \quad y = v+\beta$$

$$\begin{cases} dx = du \\ dy = dv \end{cases} \longrightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$$

$$y' = \frac{dv}{du} = \frac{(u+\alpha)+(v+\beta)+2}{(u+\alpha)-(v+\beta)-4}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{(u+v)+(\alpha+\beta+2)}{(u-v)+(\alpha-\beta-4)} ,$$

اگر فرض کنیم $\begin{cases}\alpha+\beta+2=0\\ \alpha-\beta-4=0\end{cases}$ ، داریم

$$\frac{dv}{du} = \frac{u+v}{u-v}$$

$$\boxed{\begin{matrix}\alpha = 1\\ \beta = -3\end{matrix}} \rightarrow \begin{matrix} u = x-1 \\ v = y+3 \end{matrix}$$

7

به این ترتیب

$$y' = \frac{dv}{du} = \frac{u+v}{u-v} = \frac{1+\left(\frac{v}{u}\right)}{1-\left(\frac{v}{u}\right)} \rightarrow$$

نسبت به u و v همگن شد

$$Z = \frac{v}{u} \rightarrow v = uz$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv}{du} &= v' = Z + u\frac{dZ}{du} \\ v' &= \frac{1+Z}{1-Z} \end{aligned}\right\}$$

$$\longrightarrow \quad Z + u\frac{dZ}{du} = \frac{1+Z}{1-Z}$$

$$\longrightarrow \quad u\frac{dZ}{du} = \frac{1+Z}{1-Z} - Z = \frac{(1+Z)-Z(1-Z)}{1-Z} = \frac{1+Z^2}{1-Z}$$

$$\frac{du}{u\,dZ} = \frac{1-Z}{1+Z^2} \longrightarrow \int \frac{du}{u} = \int \frac{1-Z}{1+Z^2}\,dZ$$

$$\ln u + \ln c = \int \left(\frac{dZ}{1+Z^2}\right) - \frac{1}{2}\int \frac{2Z}{1+Z^2}\,dZ$$

$$\ln cu = tg^{-1}(Z) - \frac{1}{2}\ln(1+Z)$$

$$\left\{\begin{aligned} Z &= \frac{v}{u} \\ u &= x-1 \\ v &= y+3 \end{aligned}\right. \longrightarrow \ln c(x-1) = tg^{-1}\frac{y+3}{x-1} + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y+3}{x-1}\right)$$