

1

### حل چندضلع

رسم نمودارهای به شکل

$$r = a \pm b \cos \theta$$

$$r = a \pm b \sin \theta$$

① یعنی  $r = 1 - \sin \theta$   $a=b$  از رسم و مساحت محدود به آن (مخاسبه) مثال

$$\rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$\rightarrow$  تقارن  $\begin{cases} \theta \rightarrow \pi - \theta \\ r \rightarrow r \end{cases}$  تقارن نسبت به محور  $\theta = \pi/2$  دارد  $(-\pi/2, \pi/2)$

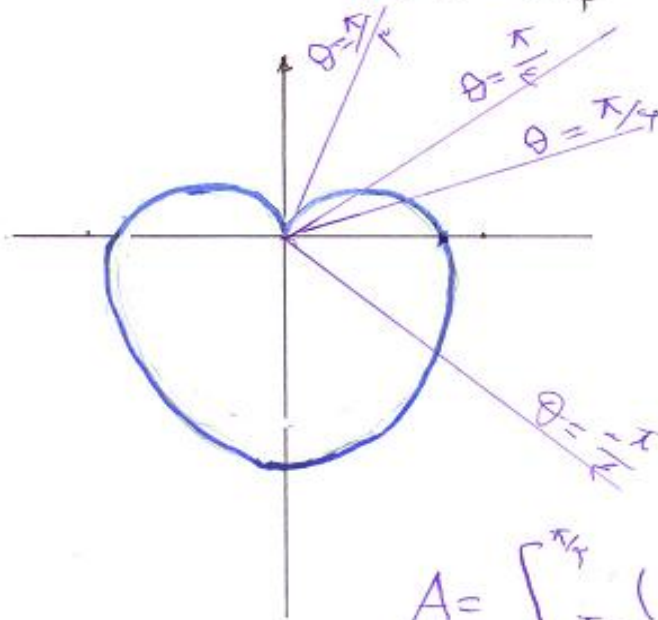
$$1 - \sin(\pi - \theta) = 1 - \sin \theta = r \quad \checkmark$$

نسبت به محور  $\theta = \pi/2$  ندارد

$\rightarrow \frac{dr}{d\theta} = -\cos \theta \rightarrow \frac{dr}{d\theta} \leq 0 \quad \forall \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  تابع نزولی است

$\theta$	$-\pi/2$	$-\pi/4$	$0$	$\pi/4$	$\pi/2$
$r$	$2$	$1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	$1$	$1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	$0$

$\rightarrow$  نقاطی



مساحت مساحت

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 d\theta$$

چون نسبت به محور  $\theta = \pi/2$  متقارن است

$$A = 2 \left( \frac{1}{2} \right) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin \theta)^2 d\theta$$

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - 2\sin \theta + \sin^2 \theta) d\theta$$

$$A = \left[ \theta + 2\cos \theta - \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta \right] \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \left[ \frac{1}{2}\theta + \cos \theta \right] \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

۲) نمودار قطبی  $r = 1 - 2\cos\theta$  را رسم و مساحت محدود به آن را  $a < b$

$\rightarrow D_r = \mathbb{R}$  باید

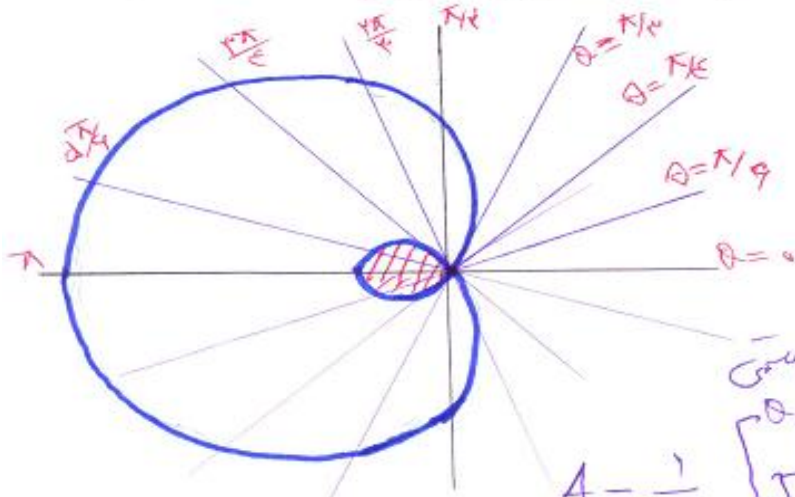
$\rightarrow$  تناظر:  $\begin{cases} \theta \rightarrow -\theta \\ r \rightarrow r \end{cases} \rightarrow 1 - 2\cos(-\theta) = 1 - 2\cos\theta = r$  ✓  
 نسبت به محور x ها تقارن دارد

$\rightarrow \frac{dr}{d\theta} = 2\sin\theta$   $\theta \in [0, \pi]$

$\frac{dr}{d\theta} \geq 0 \quad \forall \theta \in [0, \pi]$  تابع صعودی است

$\rightarrow$  نقاط کلیدی

$\theta$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$
$r$	-1	$1-\sqrt{2}$	0	1	2	$1+\sqrt{2}$	3



محاسبه مساحت داخل منتهی

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 d\theta$$

$$A = 2 \left( \frac{1}{2} \right) \int_{\pi/3}^{2\pi/3} (1 - 2\cos\theta)^2 d\theta$$

محاسبه مساحت داخل حلقه

$$A = 2 \left( \frac{1}{2} \right) \int_0^{\pi/3} (1 - 2\cos\theta)^2 d\theta$$

۳

$a > b$

۳

نمودار مستوی  $r = 2 + 2\sin\theta$  را رسم و مساحت محدود به آن را بیابید

دامنه متغیر

$$D_r = \mathbb{R}$$

تقارن

$$\begin{cases} \theta \rightarrow \pi - \theta \\ r \rightarrow r \end{cases}$$

$$2 + 2\sin(\pi - \theta) = 2 + 2\sin\theta = r \quad \checkmark$$

مشتق  $r'$

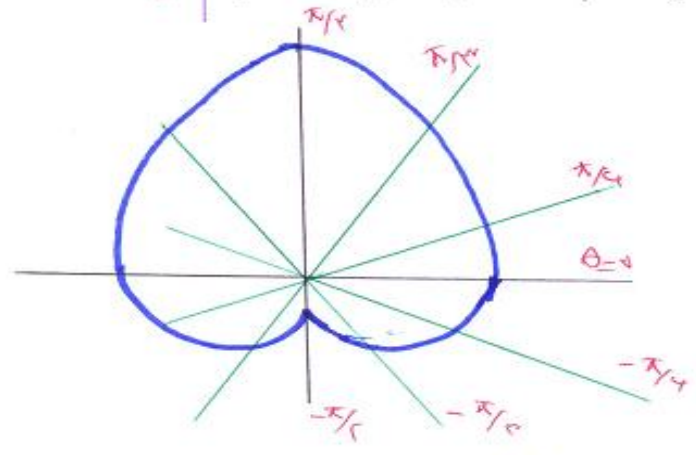
$$\frac{dr}{d\theta} = 2\cos\theta$$

تقارن نسبت به محور  $\theta = \frac{\pi}{2}$  دارد  
 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

نقاط بحر

$$\frac{dr}{d\theta} = 0 \quad \forall \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$\theta$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$0$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$r$	$1$	$2 - \sqrt{3}$	$2$	$2$	$3$	$3 + \sqrt{3}$



مساحت

$$A = 2 \left( \frac{1}{2} \right) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 + 2\sin\theta)^2 d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (4 + 4\sin\theta + 4\sin^2\theta) d\theta$$

$\downarrow$   
 $\frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

۴) مطلوب است رسم نمودار  $r = 2 \sin 2\theta$  و مساحت محدود به آن

را افند تر کنیم  
تقارن

$$D_r = \mathbb{R}$$

①  $(r, \theta) \rightarrow (-r, -\theta) \quad -r = 2 \sin(-2\theta)$   
 $\hookrightarrow (r, \theta) \rightarrow (r, \pi - \theta) \quad -r = -2 \sin 2\theta$   
 $\rightarrow r = 2 \sin 2\theta$

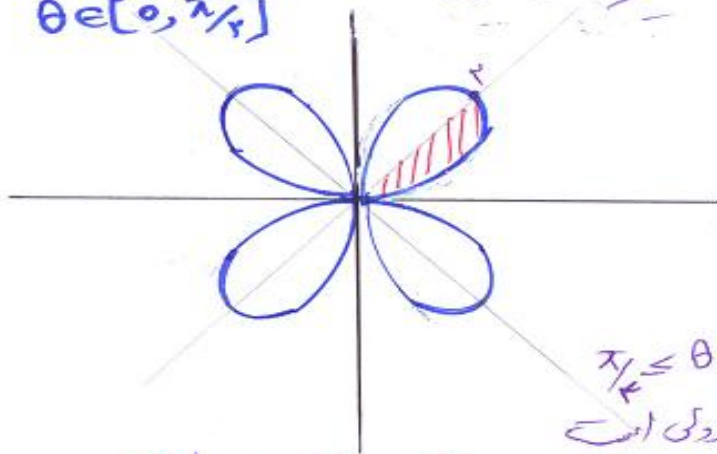
نسبت به محور  $y$  ها متقارن است

②  $(r, \theta) \rightarrow (-r, -\pi - \theta)$   
 $-r = 2 \sin 2(-\pi - \theta)$   
 $-r = -2 \sin(2\pi + 2\theta) = -2 \sin 2\theta$   
 $\rightarrow r = 2 \sin 2\theta \quad \checkmark$  نسبت به محور  $x$  ها متقارن است

\* اگر نموداری نسبت به محورهای مختصات متقارن باشد

نسبت به مبدأ نیز متقارن است. درجه

$$\theta \in [0, \pi/4]$$



\* محاسبات  $\frac{dr}{d\theta}$

$$r' = 4 \cos 2\theta$$

اگر  $0 < 2\theta \leq \pi/4$   $r \geq 0$  این نمودار صعودی است  
 $0 \leq \theta \leq \pi/4$

اگر  $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$   $r \leq 0$  و معنی کردنی است

\* نقاط گوی

$\theta$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$
$r$	0	1	$\sqrt{2}$	1

مساحت مساحت

$$A = 8 \left( \frac{1}{4} \right) \int_0^{\pi/4} 4 \sin^2 \theta d\theta = 16 \int_0^{\pi/4} (1 - \cos 4\theta) d\theta = 16 \left( \theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta \right) \Big|_0^{\pi/4}$$