معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

$$y'' = f(x, y, y')$$ معادله صریح

$$\Phi(x, y, y', y'') = 0$$ معادله ضمنی

در هر دو صورت جواب معادله به صورت زیر است:

$$h(x, y, C_1, C_2) = 0$$

دو ثابت C_1 و C_2 بدلیل مرتبه دوم بودن است

مثال 1

$$y'' = x - \sin 2x$$

$$y' = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\cos 2x + C_1$$

$$y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}\sin 2x + C_1 x + C_2$$

مثال ۲

$$y'' + y = 0$$

بعداً بطور کامل توضیح خواهیم داد که این معادله دارای دو جواب اساسی $y_1 = \cos x$ و $y_2 = \sin x$ دارد و جواب عمومی آن به صورت زیر است

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

ابتدا معادلات ضمنی را برای چند حالت بسیار خاص توضیح میدهیم

معادلات ضمنی

۱) معادلاتی به شکل $\Phi(x, y', y'')=0$

در این نوع معادلات $y'=p$ اختیار نموده و y'' را به شکل زیر بدست می آوریم

$$y'=p \to y''=\frac{dp}{dx}$$

$$\to \Phi\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right)=0$$

در این حالت Φ تبدیل به معادله مرتبه اول گردید

مثال

$$xy''=y'+x^2$$

حل: اگر $y'=p$ قرار دهیم خواهیم داشت

$$y''=\frac{dp}{dx} \to x\left(\frac{dp}{dx}\right)=p+x^2$$

$$x\left(\frac{dp}{x}\right)-p=x^2$$

$$\frac{dp}{dx}+\left(\frac{-1}{x}\right)p=x$$

معادله خطی برحسب p است. با حل آن داریم

$$\left(p\frac{1}{x}\right)'=\frac{x}{x}=1$$

$$p\frac{1}{x}=x+C_1$$

می توانید همان C_1 در نظر بگیرید

$$p=y'=x^2+C_1x \to \boxed{y=\frac{1}{3}x^3+\frac{C_1}{2}x^2+C_3}$$

۲) معادلاتی به شکل $h(y, y', y'') = 0$

در این حالت نیز $y' = p$ در نظر می‌گیریم و می‌نویسیم

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dp}{dy}\right) = p\frac{dp}{dy}$$

$$\to \quad h\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0$$
که باز هم معادله مرتبه اول برحسب y و p است

مثال
$$yy'' - 2(y')^2 = y^2$$

حل ▷ اگر $y' = p$ قرار دهیم داریم $y'' = p\frac{dp}{dy}$ (چون y در معادله هست)

$$y\left(p\frac{dp}{dy}\right) - 2p^2 = y^2$$

با اختیار $u = p^2$ می‌توان نوشت

$$\frac{du}{dy} = 2p\frac{dp}{dy} \quad \to \quad p\frac{dp}{dy} = \frac{1}{2}\frac{du}{dy}$$

$$\to \quad y\left(\frac{1}{2}\frac{du}{dy}\right) - 2u = y^2$$

$$\to \quad \frac{du}{dy} + \left(\frac{-4}{y}\right)u = 2y$$
معادله خطی برحسب u

با پیدا کردن عامل انتگرال ساز خواهیم داشت

$$\left(u\frac{1}{y^4}\right)' = \left(\frac{1}{y^4}\right)(2y) = \frac{2}{y^3}$$

$$u\frac{1}{y^4} = 2\int\frac{dy}{y^3} = \frac{-1}{y^2} + C_1$$

(۴)

یا

$$u = p^2 = -y^2 + c_1 y^4$$

$$p = y' = \pm\sqrt{y^2(c_1 y^2 - 1)}$$

$$\rightarrow \quad y' = \pm y\sqrt{c_1 y^2 - 1}$$

در اینجا برای علامت + حل کنیم

$$y' = \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = y\sqrt{c_1 y^2 - 1}$$

$$\rightarrow \int \frac{dy}{y(c_1 y^2 - 1)^{1/2}} = \int dx = x + c_2$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + c$$

$$c_1 y^2 - 1 = c_1\left(y^2 - \frac{1}{c_1}\right)$$

فرض کنید $a^2 = \frac{1}{c_1}$ ، $c_1 > 0$ ، در نتیجه

$$\sqrt{c_1 y^2 - 1} = \sqrt{c_1}\sqrt{y^2 - \frac{1}{c_1}} = \sqrt{c_1}\sqrt{y^2 - a^2}$$

$$\rightarrow \int \frac{dy}{y\sqrt{c_1 y^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{c_1}}\int \frac{dy}{y\sqrt{y^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{y}{a}\right|$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{y}{a}\right| = x + c_2}$$