معادلات دیفرانسیل

رشته‌های فنی

موضوع درس: معادلات دیفرانسیل ضمنی مرتبه اول

شکل کلی معادله مرتبه اول صریح به صورت $y' = f(x, y)$ است.

شکل ضمنی آنها $\phi(x, y, y') = 0$ است.

تعداد بسیار اندک این معادلات را می‌توان در حالت حاضر حل نمود. به چند مورد زیر اشاره می‌نمائیم:

۱) معادلاتی به شکل

$$A(x,y)\,y'^2 + B(x,y)\,y' + C(x,y) = 0$$

مثال: $x^2y'^2 + xy\,y' - 6y^2 = 0$. گاهی برای سهولت در انجام عملیات بجای y'، p قرار میدهند. مثلاً

$$x^2p^2 + xyp - 6y^2 = 0$$

حل: می‌توان نوشت

$$y' = p = \frac{-xy \pm \sqrt{(xy)^2 + 24x^2y^2}}{2x^2}$$

$$y' = \frac{-xy \pm 5xy}{2x^2} \quad \begin{cases} \text{۱)}\ \ y' = 2\left(\frac{y}{x}\right) \\ \text{۲)}\ \ y' = -3\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

۱) : $y' = \frac{2y}{x} \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \longrightarrow \frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x}$

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x} \rightarrow \ln y = 2\ln x + \ln c$$

$$\ln y = \ln cx^2 \longrightarrow y = cx^2$$

قسمت ۲ همانند ۱ حل می‌شود.

۲) معادلات به شکل $x=f(p)$ ، $p=y'$

مثال $x=y'+\ln y'$

حل ◁ اگر $y'=p$ در نظر بگیریم می‌توان نوشت

$$\frac{dy}{dx}=p \rightarrow \boxed{dx=\frac{1}{p}dy}$$

$$\rightarrow x=p+\ln p \rightarrow dx=(1+\frac{1}{p})dp$$

$$dx=\frac{1}{p}dy$$

در نتیجه

$$\frac{1}{p}dy=(1+\frac{1}{p})dp \rightarrow dy=(p+1)dp$$

$$\int dy=\int(p+1)dp \longrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2}p^2+p+C \\ x=p+\ln p \end{cases}$$

مشاهده میشود جواب به صورت پارامتری بدست آمده است

۳) معادلات به شکل $y=h(p)$ ، $p=y'$

مثال $p=y'$ ، $y=pe^p-e^p$

حل ◁ اگر $y'=p$ ، داریم

$$\frac{dy}{dx}=p \rightarrow \boxed{dy=pdx}$$

$$y=pe^p-e^p \longrightarrow dy=(e^p+pe^p-e^p)dp$$

$$dy=pe^pdp$$

$$dy=pdx$$

(۳) $p\,dx = pe^{p}\,dp \longrightarrow \int dx = \int e^{p}\,dp$

$$\longrightarrow \begin{cases} x = e^{p} + c \\ y = pe^{p} - e^{p} \end{cases}$$ جواب پارامتری

(۴) معادله کلرو

$$y = xy' + h(y')$$

$y = xp + h(p)$

مثال $y' = p$ ، $x - \frac{1}{p^2} - \frac{y}{p} = 0$

حل ◁ این معادله ظاهراً معادله کلرو نیست ولی با ضرب p در طرفین به معادله کلرو تبدیل می‌شود

$$xp - \frac{1}{p} - y = 0$$

$$y = xp - \frac{1}{p}$$

$$y' = p = p + x\frac{dp}{dx} - \frac{-1}{p^2}\frac{dp}{dx}$$

$$\longrightarrow \left(x + \frac{1}{p^2}\right)\frac{dp}{dx} = 0$$

(۱) $\frac{dp}{dx} = 0 \longrightarrow p = c$

$$\boxed{y = cp - \frac{1}{c}}$$ جواب عمومی

(۲) $x + \frac{1}{p^2} = 0$

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{1}{p^2} \\ y &= xp - \frac{1}{p} \end{aligned}\right\}$$ جواب غیرعادی و یا پوش جواب‌های عمومی

$x = \frac{-1}{p^2} \longrightarrow p = \pm\sqrt{\frac{-1}{x}}$ $\quad (x < 0)$

۴

۴ معادله لاگرانژ

$$y = x f(p) + h(p)$$
$$(p = y')$$

مثال: $y = (1+p)x + p^2$

حل: همانند طرز عمل می‌نمائیم و از طرفین مشتق می‌گیریم

$$y' = p = (1+p) + x\frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx}$$
$$\longrightarrow \quad 1 + (x + 2p)\frac{dp}{dx} = 0$$

اگر رابطه اخیر را در $\frac{dx}{dp}$ ضرب نمائیم معادله خطی برحسب x بدست می‌آید

$$\frac{dx}{dp} + x + 2p = 0$$
$$x' + x = -2p \qquad x' + f(p)x = g(p)$$
$$f(p) = 1 \longrightarrow \text{عامل انتگرال} = e^{\int f(p)dp} = e^{\int dp} = e^{p}$$
$$e^{p}(x' + x) = (-2p)e^{p}$$
$$\frac{d(xe^{p})}{dp} = -2pe^{p}$$

$u = p \rightarrow du = dp$, $dv = e^{p}dp \rightarrow v = e^{p}$, $I = uv - \int v\,du$

از دو طرف انتگرال می‌گیریم نسبت به p:

$$xe^{p} = -2\int pe^{p}dp = -2\left(pe^{p} - \int e^{p}dp\right)$$
$$xe^{p} = -2pe^{p} + 2e^{p} + C$$
$$\begin{cases} x = -2p + 2 + Ce^{-p} \\ y = (1+p)x + p^2 \end{cases}$$

جواب به صورت تابع پارامتری بدست آمده

۵ معادله ریکاتی

$$y' = f(x) + h(x)y + \phi(x)y^2$$

در این معادله اگر جوابی باشد $y = y_1(x)$ از معادله را داشته باشیم می‌توان با فرض $y = y_1 + \frac{1}{z}$ که $z = z(x)$ تابعی مجهولی باشد جواب معادله را یافت. گاهی در مسائل y_1 را به ما میدهند اگر چنانچه نداده باشند باید آن را حدس بزنیم

* سؤالات در این مورد به گونه‌ای است که حدس ما فقط در قالب x، $\pm x$، $e^{\pm x}$، $\sin x$ و یا $\cos x$ خواهد بود

مثال:

$$xy' - y^2 + (2x+1)y = x^2 + 2x$$

حل: معادله ریکاتی است ولی y_1 را به ما نداده‌اند، اگر هر یک از توابع فوق در معادله صدق نماید می‌تواند y_1 باشد (البته همیشه چنین نخواهد بود) اگر $y = x$ قرار دهیم، داریم

$$x(1) - (x)^2 + (2x+1)(x) = x - x^2 + 2x^2 + x$$
$$= 2x + x^2 \checkmark$$

پس $y_1 = x$ جوابی از معادله است

$$y = y_1 + \frac{1}{z} = x + \frac{1}{z} \quad , \quad y' = 1 - \frac{z'}{z^2}$$

y و y' را در معادله قرار میدهیم

$$x\left(1 - \frac{z'}{z^2}\right) - \left(x + \frac{1}{z}\right)^2 + (2x+1)\left(x + \frac{1}{z}\right) = x^2 + 2x$$

$$x - x\frac{z'}{z^2} - x^2 - \frac{2x}{z} - \frac{1}{z^2} + 2x^2 + \frac{2x}{z} + x + \frac{1}{z} = x^2 + 2x$$

(۶)

با ساده کردن خواهیم داشت

$$-x\frac{Z'}{Z^{2}} - \frac{1}{Z^{2}} + \frac{1}{Z} = 0$$

یا

$$-xZ' + Z = 1$$

$$Z' + \left(\frac{-1}{x}\right)Z = \frac{-1}{x}$$

معادله خطی برحسب Z است

عامل انتگرال ساز $= e^{\int \frac{-1}{x}dx} = e^{-\ln x} = x^{-1} = \frac{1}{x}$

$$\frac{1}{x}\left(Z' - \frac{1}{x}Z\right) = \left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-1}{x}\right)$$

$$\left(Z\cdot\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^{2}}$$

$$Z\cdot\frac{1}{x} = \int\frac{-1}{x^{2}}dx = \frac{1}{x} + c$$

$$Z = cx + 1$$

با قرار دادن مقدار Z در $y = x + \frac{1}{Z}$ خواهیم داشت

$$\boxed{y = x + \frac{1}{cx+1}}$$

معادله برنولی

ممکن است در یک معادله ای که خطی نباشد، بتوانی با تعویض متغیری، معادله را به خطی تبدیل نمود

مثال

$$x y' \cos y + \sin y = 1$$

حل این معادله خطی نیست ولی با تعویض متغیر $u = \sin y$ می توان آنرا به خطی تبدیل نمود

$$u = \sin y \rightarrow u' = y' \cos y$$

$$x y' \cos y + \sin y = 1$$

$$x u' + u = 1$$

که به راحتی قابل حل است

$$(ux)' = 1 \rightarrow ux = x + C$$

$$\boxed{x \sin y = x + C}$$

مجموعه ای از معادلات زیر را می توان با تعویض متغیر خاصی به شکلی که ارائه میشود، خطی نمود. معمولاً این روش موسوم به برنولی است

$$f(x) y' + h(x) y = g(x) y^m$$

m: عددی گویا

مثال

$$x y' - y = 2x y^3$$

حل، طرفین را به y^3 تقسیم می کنیم

$$x y' y^{-3} - y^{-2} = 2x$$

$$u = y^{-2} \rightarrow u' = -2 y' y^{-3} \rightarrow y' y^{-3} = \frac{-1}{2} u'$$

$$\rightarrow x\left(\frac{-1}{2} u'\right) - u = 2x \rightarrow u' + \frac{2}{x} u = -4$$

معادله خطی است و به راحتی قابل حل است.

(۷)

مسیرهای قائم

فرض کنید $f(x,y,c)=0$ بیانگر مسیرهای با تغییر مقادیر مختلف c باشد
در این صورت مسیرهای $h(x,y,c)=0$ را قائم بر f گویند هرگاه
زاویه بین مماسهای این مسیرها در نقاط تلاقی آنها قائمه باشد
جهت بدست آوردن مسیرهای h، پارامتر c را از
دستگاه زیر حذف می نمائیم

$$\begin{cases} f(x,y,c)=0 \\ f_x(x,y,c)=0 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ مشتق f نسبت به x

رابطه ای که از حذف c در دستگاه فوق حاصل میگردد،
معادله دیفرانسیلی ما شده $\phi(x,y,y')$ است که در واقع
$f(x,y,c)=0$ جوابهای عمومی آن هستند
اگر در ϕ بجای y'، مقدار $\frac{-1}{y'}$ قرار دهیم، معادله
دیفرانسیل دیگری حاصل می گردد که توابع $h(x,y,c)=0$ جواب
های آن که در واقع مسیرهای قائم f خواهند بود

مثال (۱) مسیرهای قائم بر منحنی های $x^2-y^2=cx$ را بیابید

حل $\triangleleft$ اگر نسبت به x مشتق بگیریم، داریم

$$2x-2yy'=c$$

اکنون c را از دستگاه زیر حذف می نمائیم

$$\begin{cases} 2x-2yy'=c \\ x^2-y^2=cx \end{cases} \longrightarrow \frac{2x-2yy'}{x^2-y^2}=\frac{1}{x}$$

(۸) $\longrightarrow 2x^2 - 2xyy' = x^2 - y^2$

$$2xyy' - x^2 - y^2 = 0 \qquad (1)$$

اکنون در رابطه (1) بجای y' ، $\frac{-1}{y'}$ قرار دهیم

$$2xy\left(\frac{-1}{y'}\right) - x^2 = y^2$$

اگر می دقت کنیم با درنظر گرفتن $x' = \frac{1}{y'}$ ، معادله برحسب x برنولی می شود

$$(-2y)xx' - x^2 = y^2$$

$$(-2y)(xx') - x^2 = y^2$$

اگر $u = x^2$ درنظر بگیریم، خواهیم داشت

$$u' = 2xx'$$

$$\longrightarrow (-y)u' - u = y^2$$

که معادله برحسب u خطی است

$$yu' + u = -y^2 \longrightarrow (yu)' = -y^2$$

$$\longrightarrow yu = \frac{-1}{3}y^2 + C$$

که با قرار دادن $u = x^2$ ، داریم

$$\boxed{x^2y = \frac{-1}{3}y^2 + C}$$