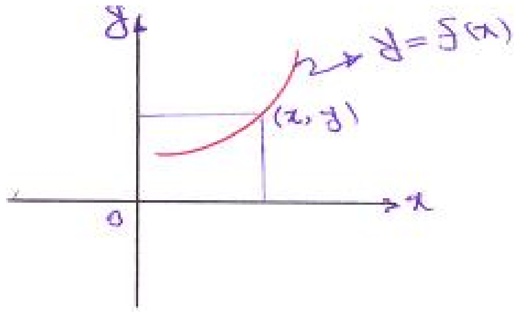
۱

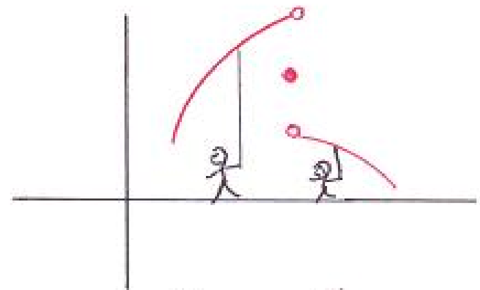
توابع چند متغیره

$y = f(x)$ تابع یک متغیره $\begin{cases} x & \text{متغیر} \\ y & \text{تابع} \end{cases}$ $x \in \mathbb{R}$

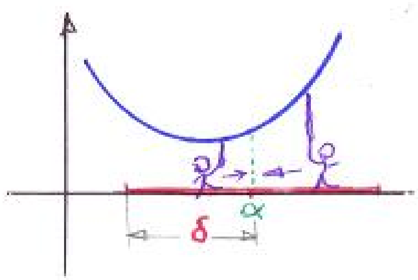
$\Phi(x, y) = 0$ تابع ضمنی

(x, y) زوج مرتب





حد تابع $f(x)$ در $x=\alpha$



$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = l$$

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni 0 < |x-\alpha| < \delta$

$\longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon$

مثال: نشان دهید $\lim_{x \to 2} (2x-1) = 3$

حل: باید یک شعاع همسایگی $\delta = \delta(\epsilon)$ بدست آورید که وقتی x در فاصله ای با این شعاع قرار می گیرد، داشته باشیم $|f(x) - 3| < \epsilon$

$$|(2x-1) - 3| = |2(x-2)| = 2|x-2| < \epsilon$$

$$|x-2| < \frac{\epsilon}{2} = \delta$$

البته برای دقت بیشتر قرار می دهند $\delta \le \frac{\epsilon}{2}$.

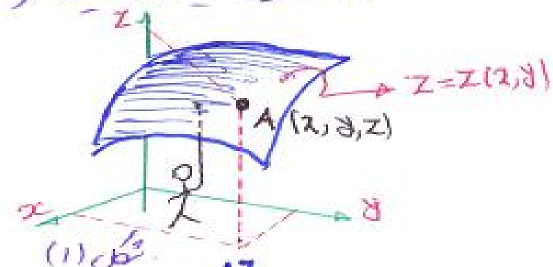
تابع دو متغیره $Z=f(x,y)$ صریح

ضمنی $\Phi(x,y,Z)=0$

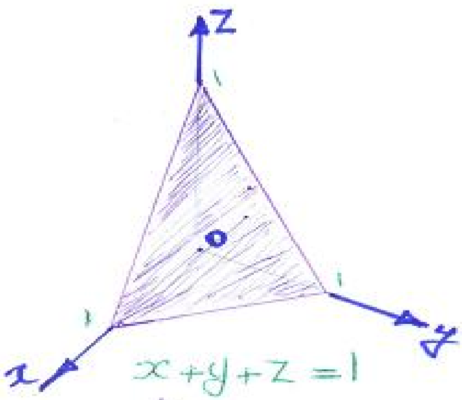
$$\begin{cases} x,\ y & \text{متغیرهای مستقل} \\ Z & \text{متغیر تابع} \end{cases} \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

(x,y,z) سه عضوی یا سه تایی مرتب

$(x,y,Z)\in\mathbb{R}^3$

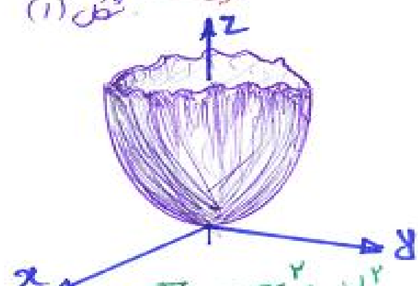


شکل (۱)



$x+y+Z=1$

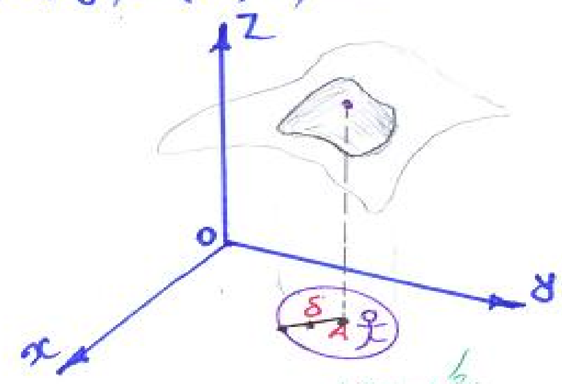
شکل (۲)



$Z=x^2+y^2$

شکل (۳)

حد تابع $Z=f(x,y)$ در نقطه $(x,y)=(\alpha,\beta)=A$



شکل (۴)

$A\Big|^{\alpha}_{\beta} \qquad X\Big|^{x}_{y}$

$\overline{AX}=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$

$0<\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}<\delta$

$$|a| \le \sqrt{a^2+b^2} \qquad |a|,|b| \le |a+b|$$
$$|b| \le \sqrt{a^2+b^2} \qquad |a+b| \le |a|+|b|$$
$$|a-b| \le |a|+|b|$$

$$|x-\alpha| \le \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} < \delta \quad \to \quad |x-\alpha|<\delta$$
$$|y-\beta| \le \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} < \delta \quad \quad |y-\beta|<\delta$$

تعریف: تابع $z=f(x,y)$ دارای حد l است و می‌نویسند

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(\alpha,\beta)\\ P\to P_0}} f(x,y) = l$$

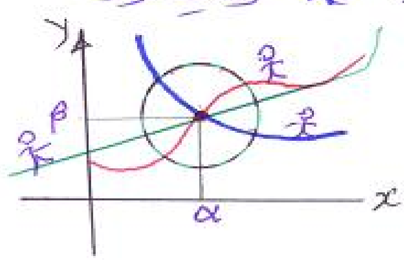
هرگاه

$$\forall \epsilon>0,\ \exists \delta>0 \ni 0<\underbrace{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}}_{\substack{|x-\alpha|<\delta\\ |y-\beta|<\delta}}<\delta \to |f(x,y)-l|<\epsilon$$

* نکته بسیار مهم *

برای تابع $y=f(x)$ وقتی حد تابع را در $x=\alpha$ بررسی می‌کنید x فقط روی محور xها از سمت چپ و راست جهت بررسی رفتارش به سمت α حرکت می‌کند.

در تابع $Z=Z(x,y)$ چنین نخواهد بود. تابع وقتی در نقطه (α,β) دارای حد است اگر برای هر مسیر بخواهی که متغیر به نقطه نزدیک شود مقدار Z به l نزدیک شود.



مثال: ثابت کنید $\lim_{(x,y)\to(3,1)} (2x-y)=5$

$$\forall \epsilon>0\ \exists \delta>0 \ni 0<\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}<\delta$$

$|x-3|<\delta\ ,\ |y-1|<\delta$

$$\longrightarrow |(2x-y)-5|<\epsilon \quad (1)$$

$$|2x-y-5| = |2x-y-(6-1)|$$
$$= |(2x-6)-(y-1)|$$
$$= |2(x-3)-(y-1)|$$
$$\leq 2|x-3|+|y-1| < 2\delta+\delta = 3\delta \underset{\leq}{=} \epsilon$$

اگر $\delta = \frac{\epsilon}{3}$ رابطه (1) در همسایگی نقطه (3,1) به شعاع δ برقرار خواهد بود

در مثال های زیر نشان میدهیم که $z=f(x,y)$ در نقطه داده شده حد ندارد

مثال (1) حد تابع $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+2y^2}$ را در نقطه $(0,0)$ بررسی نمائید

حل: اگر چنانچه دو مسیر P_1 و P_2 انتخاب نمائیم که مقدار حد آنها یکسان نباشد، آنگاه تابع حد نخواهد داشت

* نکته مهم * مسیرها باید ~~به~~ به گونه ای انتخاب شوند که حتماً به نقطه مورد نظر یعنی $(0,0)$ منتهی گردند

P : Path
مسیر

(1) $P_1 : y=x$ واضح است که اگر $x\to 0$، $y\to 0$.

به این ترتیب

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+2y^2} = \lim_{\substack{P_1 \\ x\to 0}} \frac{x(x)}{x^2+2(x)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

۲ $P_2 : y = 3x \to \begin{cases} x\to 0 \\ y\to 0 \end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+2y^2} = \lim_{\substack{P_2 \\ x\to 0}} \frac{x(3x)}{x^2+2(3x)^2} = \frac{3}{19}$$

چون $\frac{1}{3} \neq \frac{3}{19}$ دو مسیر دیگر به شکل زیر را بررسی می‌کنیم

۳ $P_3 : y = x^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+2y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x^2)}{x^2+2(x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2+2x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{1+2x^2} = 0$$

۴ $P_4 : y = x^3$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+2y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x^3)}{x^2+2(x^3)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^2+2x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1+2x^4} = 0$$

در اینجا دو مقدار حد با هم برابر شده‌اند ولی این دلیل بر وجود حد نخواهد بود.

مثال ۲ $(x,y)=(0,0)$ ، $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$

حل: مسیرهای P به شکل $y=x^m$ را که $m\geq 0$ را در نظر می‌گیریم

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{\substack{P\\x\to 0}}\frac{x(x^m)^2}{x^2+(x^m)^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^{2m+1}}{x^2+x^{4m}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{2m-1}}{1+x^{4m-2}}$$

فرض کنید $2m-1\neq 0$ ، یعنی $m\neq\frac{1}{2}$ ، به این ترتیب
برای هر $m\neq 2$

$$\lim_{x\to}\frac{x^{2m-1}}{1+x^{4m-2}}=0$$

به نظر می‌آید که تابع باید حدی برابر صفر داشته باشد
اگر $m=\frac{1}{2}$ داریم

$$\lim_{x\to}\frac{x^{2(\frac{1}{2})-1}}{1+x^{4(\frac{1}{2})-2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^0}{1+x^0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\neq 0$$

پس تابع حد ندارد

$m=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ P: y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$