(۱)

ریاضی ۲ رشته علوم کامپیوتر

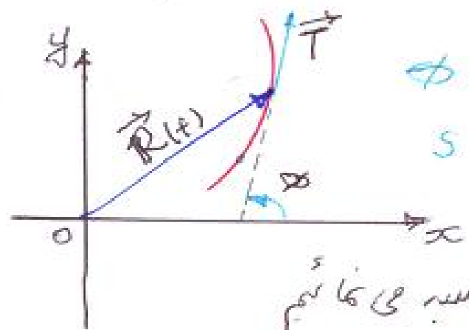
موضوع درس : انحناء منحنی

۱- انحناء در فضای دو بعدی $(\mathbb{R}^2)$

برای منحنی C شکل زیر انحناء به صورت

کاپا $\leftarrow$ $K = \left| \frac{d\phi}{ds} \right|$ یا $\pm K = \frac{d\phi}{ds}$

تعریف می گردد



$\phi = tg^{-1}\frac{y}{x} = tg^{-1}(y')$

s : طول قوس

در سه حالت زیر مقدار انحناء را محاسبه می نمائیم

الف: ① $y = f(x)$ ، y تابعی از x است

$K = \left| \frac{d\phi / dx}{ds / dx} \right|$ $\qquad \phi = tg^{-1}(y')$

$\frac{d\phi}{dx} = \frac{y''}{1+y'^2}$ (I)

$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ از قبل می دانیم

$\frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx} = \sqrt{\frac{dx^2+dy^2}{dx^2}} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

$= \sqrt{1+y'^2} = (1+y'^2)^{\frac{1}{2}}$ (II)

با توجه به روابط (I) و (II) و تعریف K داریم

۲

$$\boxed{K = \left| \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \right|}$$

۲) $x = h(y)$ ، x تابعی از y است

$$K = \left| \frac{d\phi/dy}{ds/dy} \right| \qquad \phi = tg^{-1}(y') = tg^{-1}\left(\frac{1}{x'}\right)$$

$$\frac{ds}{dy} = \sqrt{1+x'^2}$$

که منظور از x' ، $\frac{dx}{dy}$ است. به طریق مشابه خواهیم داشت

$$\boxed{K = \left| \frac{x''}{(1+x'^2)^{3/2}} \right|}$$

مثال ۱) برای تابع $y = \ln(1+x)$ ، مقدار انحناء را در نقطه $x = 1$ محاسبه نمائید

حل

$$y = \ln(1+x) \longrightarrow \begin{cases} y' = \dfrac{1}{1+x} \\ y'' = \dfrac{-1}{(1+x)^2} \end{cases}$$

$$\longrightarrow K = K(x) = \left| \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \right| = \left| \frac{\frac{-1}{(1+x)^2}}{\left[1+\left(\frac{1}{1+x}\right)^2\right]^{3/2}} \right|$$

همانطور که مشاهده می‌شود K به صورت تابعی از x بدست آمده، لذا به این دلیل با $K(x)$ نمایش میدهیم.

با توجه به صورت مسأله برای $x = 1$ داریم

$$K = \left| \frac{\frac{-1}{4}}{\left(1+\frac{1}{4}\right)^{3/2}} \right| = \frac{2}{5\sqrt{5}}$$

③

در این مثال مقدار $K(1)$ را می‌توان از روش دوم استفاده نمود. البته همیشه اینطور نخواهد بود.

$$y=\ln(1+x) \longrightarrow x+1=e^{y} \longrightarrow \boxed{x=e^{y}-1}$$

$$x'=e^{y} \quad , \quad x''=e^{y}$$

$$K=\left|\frac{x''}{(1+x'^{2})^{3/2}}\right| = K(y)=\left|\frac{e^{y}}{[1+(e^{y})^{2}]^{3/2}}\right|$$

$$K(y)=\left|\frac{e^{y}}{(1+e^{2y})^{3/2}}\right|$$

اکنون برای $x=1$ باید مقدار نظیر برای y را بدست آوریم

$$y=\ln(1+1)=\ln 2 \quad \begin{cases} e^{\ln 2}=2 \\ e^{2y}=(e^{y})^{2}=2^{2}=4 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(x=1)} K(\ln 2)=\left|\frac{2}{(1+4)^{3/2}}\right|=\frac{2}{5\sqrt{5}} \checkmark$$

مثال ② ** در چه نقطه‌ای منحنی تابع $y=e^{x}$ دارای بیشترین انحناء است؟

حل ← می‌دانیم K تابعی از x است. ابتدا $K(x)$ را بدست می‌آوریم و با توجه به مطالب مربوط به محاسبه اکسترمم (بیشینه و کمینه) در ریاضی ۱، بیشترین مقدار را بدست می‌آوریم.

به این ترتیب

$$K=K(x) \longrightarrow K'(x)=0$$

اگر برای مقادیر بدست آمده از این معادله، $K''(x)<0$، آنگاه مقدار ماکزیمم خواهد بود.

④ $y = e^x \begin{cases} \to y' = e^x \\ \to y'' = e^x \end{cases} \to K(x) = \left|\dfrac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}\right| = \left|\dfrac{e^x}{(1+e^{2x})^{3/2}}\right|$

چون $e^x > 0$ ، در نتیجه

$$K(x) = \frac{e^x}{(1+e^{2x})^{3/2}} = e^x \cdot (1+e^{2x})^{-3/2}$$

$$K'(x) = e^x\left[(1+e^{2x})^{-3/2}\right] + e^x\left[-\frac{3}{2}(2e^{2x})(1+e^{2x})^{-\frac{3}{2}-1}\right]$$

$$K'(x) = e^x\left[1 - 3e^{2x}(1+e^{2x})^{-1}\right](1+e^{2x})^{-3/2}$$

$$= e^x\left[1 - \frac{3e^{2x}}{1+e^{2x}}\right](1+e^{2x})^{-3/2}$$

$$= e^x\left(\frac{1-2e^{2x}}{1+e^{2x}}\right)(1+e^{2x})^{-3/2}$$

$$K'(x) = e^x(1-2e^{2x})(1+e^{2x})^{-5/2} \quad ①$$

$$K'(x) = 0 \longrightarrow \begin{cases} e^x = 0 & x \to -\infty \\ 1-2e^{2x} = 0 \end{cases}$$

$\ln 1 - \ln 2$

$$2e^{2x} = 1 \to e^{2x} = \frac{1}{2} \to 2x = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$$

$$\to x = -\frac{1}{2}\ln 2 \quad , \quad y = e^{-\frac{1}{2}\ln 2} = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

پس منحنی $y = e^x$ در نقطه $\left(-\frac{1}{2}\ln 2, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ دارای بیشترین انحناء است زیرا می‌توان نشان داد $K''\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right) < 0$.

برای این منظور K'' را از رابطه ① مشتق گرفته و سپس مقدار $x = -\frac{1}{2}\ln 2$ را قرار میدهیم.

ب: محاسبه انحناء منحنی تابع پارامتری

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad C:\ \vec{R}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$$

در این حالت t متغیر مورد نظر است

$$\phi = tg^{-1}(y') = tg^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) = tg^{-1}\left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right) = tg^{-1}\left(\frac{y_t}{x_t}\right)$$

که منظور از $x'(t) = x_t$ و $y'(t) = y_t$ ، مشتق x و y نسبت به پارامتر t است.

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{(dx)^2 + (dy)^2}{(dt)^2}} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2} \quad (1)$$

$$K(t) = \left|\frac{d\phi/dt}{ds/dt}\right| , \quad \phi = tg^{-1}\left(\frac{y'}{x'}\right)$$

$$\phi' = \frac{\left(\frac{y'}{x'}\right)_t}{1 + \left(\frac{y'}{x'}\right)^2} = \frac{\frac{y''x' - x''y'}{x'^2}}{\frac{x'^2 + y'^2}{x'^2}} = \frac{y''x' - x''y'}{x'^2 + y'^2} \quad (2)$$

به این ترتیب با توجه به روابط (1) و (2) خواهیم داشت

$$K = \left| \frac{(y''x' - x''y')/(x'^2 + y'^2)}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right|$$

$$\boxed{K = \left| \frac{y''x' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \right|}$$

مثال: انحناء منحنی $\vec{R}(t) = (2\cos t)\,\vec{i} + (2\sin t)\,\vec{j}$ را برای $t = \frac{\pi}{4}$ بدست آورید

حل

$$x(t) = 2\cos t \rightarrow x' = -2\sin t, \quad x'' = -2\cos t$$

$$y(t) = 2\sin t \rightarrow y' = 2\cos t, \quad y'' = -2\sin t$$

$$x'^2 + y'^2 = 4$$

$$K = \left| \frac{y''x' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \right| = \left| \frac{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}{4^{3/2}} \right| = \left| \frac{4}{4^{3/2}} \right| = \frac{1}{2}$$

** نکته جالب است که K مستقل از پارامتر t بوده و برای همه مقادیر t مقدار ثابت $\frac{1}{2}$ است

منحنی فوق یک دایره است زیرا

$$x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t \longrightarrow x^2 + y^2 = 4$$

می توان ثابت کرد که اگر شعاع دایره $R = a$، آنگاه مقدار انحنا دایره در هر نقطه آن برابر است با $K = \frac{1}{a}$.

یعنی با شعاع آن نسبت معکوس دارد.

تمرین انحناء دایره $x^2 + y^2 = a^2$ را با استفاده از روش (الف) بدست آورید

* توجه ← بسیار مهم *

روشهای محاسبه انحناء منحنی در فضای $\mathbb{R}^2$ قابل استفاده در فضای $\mathbb{R}^3$ نمی باشد

۷

۲- انحناء در فضای سه بعدی $(\mathbb{R}^3)$

برای منحنی $\vec{C}$ به شکل
$$\vec{R}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$$
همانطور که قبلاً توضیح دادیم

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}, \quad \boxed{\left|\frac{ds}{dt}\right| = |\vec{V}|}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}, \quad \vec{T} = \frac{d\vec{R}}{ds} = \pm\left(\frac{dt}{ds}\right)\frac{d\vec{R}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{T} = \pm\frac{1}{|\vec{V}|}\,\vec{V}}$$

از قبل داشتیم

$$\vec{T} = (\cos\phi)\,\vec{i} + (\sin\phi)\,\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{T}}{d\phi} = \vec{N} = (-\sin\phi)\,\vec{i} + (\cos\phi)\,\vec{j}$$

به راحتی مشاهده می‌شود که بردار ~~...~~ یکانی مماسی $\vec{T}$ و بردار $\vec{N}$ بر هم عمودند و از طرفی $|\vec{N}| = 1$. در واقع $\vec{N}$ را بردار یکانی قائم گویند.

اکنون برای محاسبه K در فضای سه بعدی می‌توان نوشت:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \left(\frac{d\phi}{ds}\right)\left(\frac{d\vec{T}}{d\phi}\right) = K\vec{N}$$

به این ترتیب

$$\left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| = |K\vec{N}| = K|\vec{N}| = K \times 1 = K$$

پس داریم

$$\boxed{K = \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right|}$$

این دستور می‌تواند برای فضای دو بعدی نیز بکار رود زیرا ممکن است $z(t) = 0$.

مثال: برای منحنی C به معادله زیر، مقدار انحنا را در $t=0$ محاسبه نمائید.

$$\vec{R}(t) = (1+t)\vec{i} + t^2\vec{j} - 3t\vec{k}$$

حل ← برای محاسبه K ابتدا بردار $\frac{d\vec{T}}{ds}$ را بدست آورده و سپس طول آن را محاسبه می‌نمائیم

$$\vec{T} = \frac{d\vec{R}}{ds} = \frac{dt}{ds}\cdot\frac{d\vec{R}}{dt} = \left(\frac{dt}{ds}\right)(\vec{i} + 2t\vec{j} - 3\vec{k})$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{i} + 2t\vec{j} - 3\vec{k} \quad , \quad \frac{ds}{dt} = |\vec{v}| = \sqrt{10+4t^2}$$

$$\rightarrow \vec{T} = \left(\sqrt{10+4t^2}\right)^{-1}(\vec{i} + 2t\vec{j} - 3\vec{k}) \quad , \quad \boxed{\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{10+4t^2}}}$$

$$\vec{T} = \left(\frac{1}{\sqrt{10+4t^2}}\right)\vec{i} + \left(\frac{2t}{\sqrt{10+4t^2}}\right)\vec{j} + \left(\frac{-3}{\sqrt{10+4t^2}}\right)\vec{k}$$

$$\vec{T} = (10+4t^2)^{-\frac{1}{2}}\vec{i} + 2t(10+4t^2)^{-\frac{1}{2}}\vec{j} - 3(10+4t^2)^{-\frac{1}{2}}\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \left(\frac{dt}{ds}\right)\cdot\left(\frac{d\vec{T}}{dt}\right) = \frac{1}{|\vec{v}|}\cdot\frac{d\vec{T}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{10+4t^2}}\left\{\frac{-1}{2}(8t)(10+4t^2)^{-\frac{3}{2}}\vec{i} + \left[2(10+4t^2)^{-\frac{1}{2}} + (2t)\left(\frac{-8}{2}t\right)\times(10+4t^2)^{-\frac{3}{2}}\right]\vec{j} + \left[-3\left(\frac{-8}{2}t\right)(10+4t^2)^{-\frac{3}{2}}\right]\vec{k}\right.$$

اگر در $\frac{d\vec{T}}{ds}$ مقدار $t=0$ را قرار دهیم، خواهیم داشت

$$\left(\frac{d\vec{T}}{ds}\right)_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{10}}\left[0\vec{i} + 2(10)^{-\frac{1}{2}}\vec{j} + 0\vec{k}\right] = \frac{1}{5}\vec{j}$$

به این ترتیب

$$\boxed{K(0) = \left|\left(\frac{d\vec{T}}{ds}\right)_{t=0}\right| = \frac{1}{5}}$$

تمرینات : برای توابع زیر انحناء منحنی را بدست آورید

۱) $y = e^{2x}$

۲) $y = \ln(\cos x)$

۳) $y = a \cosh(x/a)$

۴) $x = \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{8y^2}$

۵) $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$

۶) $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$

۷) $\vec{R}(t) = t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j} + t^3\,\vec{k}$

۸) $\vec{R}(t) = (3\cos t)\,\vec{i} + (3\sin t)\,\vec{j} + t^2\,\vec{k}$